



FACULTE DES SCIENCES BEN M'SICK
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

PROJET DE FIN D'ETUDE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER EN MATHEMATIQUES

Présenté par :

Kaoutar AROUCHE

Modélisation mathématique de la dynamique de transmission du mildiou de la pomme de terre

Soutenu le 22/05/2023, devant la commission d'examen :

Pr. ADNAOUI Khalid	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Président
Pr. EL OURRACHI Mounir	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Examineur
Pr. ZAKARY Omar	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Examineur
Pr. LAARABI Hassan	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Examineur
Pr. FERJOUCHIA Hanane	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Examinatrice
Pr. IZID Malika	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Examinatrice
Pr. RIOUALI Maryam	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Co-encadrante
Pr. ELBERRAI Imane	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Encadrante

Année Universitaire 2022-2023

Dédicace

Du profond de mon cœur, je dédie ce travail à tous ceux qui me sont chers,

À MES CHERS PARENTS

Ce travail comme preuve de respect, de gratitude, d'amour et de ma reconnaissance pour vos sacrifices consentis. Que dieux vous garde et vous protège et vous accorde une longue vie.

À MA CHERE SŒUR IMANE ET MA CHERE GRAND-MERE

Un grand merci pour votre amour inconditionné et le soutien moral que vous m'avez apporté tout au long de la rédaction de ce travail.

À MES PROFESSEURS ET MON ENCADRANTE

Pour vos utiles conseils et votre persévérance.
Un grand merci pour votre encadrement et votre entière disponibilité.

Remerciement

Tout d'abord, Je tiens à remercier sincèrement mon encadrant professeur Madame le professeur **IMANE EL BERRAI** d'avoir accepté l'encadrement de ce travail. Je tiens à exprimer ici ma reconnaissance pour ses orientations ficelées, ses conseils ainsi que sa disponibilité tout au long de la réalisation de mon projet.

Je remercie également Madame **MARYAM RIOUALI**, pour son soutien, ses remarques et ses conseils précieux de rédaction.

Par ailleurs, je tiens à remercier Monsieur le professeur **KHALID AD-NAOUI**, de la faculté des sciences Ben M'Sick de l'Université Hassan II de Casablanca, qui m'as fait l'honneur de présider le jury de ce travail.

J'adresse aussi mes vifs remerciements aux membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont rendu en acceptant de faire partie de jury et d'examiner mon travail.

Je ne peux pas oublier de remercier les professeurs de la faculté des sciences Ben M'Sick et au responsable du Master d'Analyse Mathématique et Applications (AMA) qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.

Enfin, je remercie Monsieur le Doyen de la faculté des sciences Ben M'Sick. Ainsi que toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'épanouissement et l'élaboration de ce travail.

Table des matières

introduction générale	7
1 Préliminaire	8
1.1 Généralités sur les équations différentielles	8
1.2 Problème de Cauchy-Lipschitz	9
1.3 Point d'équilibre	11
1.4 Le nombre de reproduction de base R_0	11
1.5 Stabilité	12
1.6 Critère de Routh-Hurwitz	13
1.7 Fonction de Lyapunov	14
2 Les modèles à compartiments classiques	16
2.1 Modèle épidémiologique	16
2.2 Les modèles à deux compartiments	16
2.2.1 Modèle à compartiment SI	16
2.2.2 Modèle à compartiment SIS	17
2.3 Les modèles à trois compartiments	18
2.3.1 Modèle à compartiment SIR	18
2.3.2 Modèle à compartiment SIRS	19
2.3.3 Modèle à compartiment SEI	19
2.4 Le modèle à quatre compartiments	20
2.4.1 Modèle à compartiment SEIR	20
3 Le mildiou du pommier de la terre	22
3.1 Introduction sur le mildiou	22
3.2 Les symptômes du mildiou de la pomme de terre :	23
3.2.1 Les symptômes du mildiou sur les feuilles :	23
3.2.2 Les symptômes du mildiou sur les tiges :	23
3.2.3 Les symptômes du mildiou sur les tubercules	24
3.3 Cycle de développement de la maladie	24
3.4 Les conséquences et le traitement du mildiou :	25

4	L'analyse mathématique du modèle SEIR	27
4.1	Introduction	27
4.2	La formulation du modèle	27
4.3	Analyse des équilibres de modèle :	29
4.3.1	Point d'équilibre sans maladie :	29
4.3.2	Point d'équilibre endémique :	29
4.4	Nombre de reproduction de base R_0	31
4.5	Analyse de la stabilité des points d'équilibres du modèle	32
4.5.1	La stabilité du point d'équilibre sans maladie . . .	32
4.5.2	La stabilité de point d'équilibre endémique . . .	34
5	Contrôle optimal de la dynamique de transmission du Mildiou de la pomme de terre	39
5.1	Problème du controle optimal	39
5.2	existence du contrôle optimal	40
5.3	Caractérisation de contrôle optimale	41
5.4	Simulation	43
6	Conclusion	45
	Bibliographie	46

Introduction

La modélisation mathématique revêt une importance fondamentale dans de nombreux domaines scientifiques. Elle permet de représenter et d'analyser des phénomènes complexes d'une manière systématique et précise. En utilisant des équations, des variables et des paramètres, les modèles mathématiques fournissent un cadre théorique solide pour étudier et comprendre les propriétés et les comportements des systèmes réels. Ils permettent aux chercheurs de formuler des hypothèses, de tester des théories, de prédire des résultats et de prendre des décisions éclairées. Les modèles mathématiques sont essentiels dans des domaines tels que l'économie, l'ingénierie, les sciences de la vie, la physique, la botanique, l'agriculture, et bien d'autres encore. Ils jouent un rôle clé dans l'optimisation des processus, la simulation de scénarios, la planification stratégique et la résolution de problèmes complexes. En résumé, la modélisation mathématique est un outil puissant qui permet de repousser les limites de notre compréhension du monde qui nous entoure et de favoriser des avancées scientifiques et technologiques significatives.

La maladie du mildiou de la pomme de terre est une affection majeure qui peut causer des pertes importantes dans les cultures de pommes de terre. Cette maladie est causée par un champignon appelé *Phytophthora infestans*. Le mildiou se propage généralement par temps humide et frais, favorisant ainsi le développement et la propagation du champignon. Les symptômes du mildiou de la pomme de terre apparaissent généralement sur les feuilles, les tiges et les tubercules de la plante. Les premiers signes sont des taches sombres et huileuses sur les feuilles, qui peuvent se développer rapidement en une couche cotonneuse de spores blanchâtres sur la face inférieure des feuilles. Les tiges peuvent également présenter des lésions brunes et des nécroses. Dans les cas graves, les tubercules peuvent être infectés, entraînant une pourriture et une détérioration de la récolte. La gestion de la maladie du mildiou de la pomme de terre repose sur une combinaison de mesures préventives et curatives. Les agriculteurs doivent surveiller régulièrement leurs cultures et prendre des mesures préventives telles que la rotation des cultures, l'utilisation de semences

certifiées et la mise en place de bonnes pratiques de gestion de l'irrigation. Des fongicides spécifiques peuvent également être utilisés pour contrôler la maladie, en particulier lorsque les conditions sont favorables au développement du mildiou. La modélisation mathématique a également été utilisée pour prédire et gérer la propagation du mildiou de la pomme de terre. En utilisant des modèles basés sur les conditions climatiques, les cycles de vie du champignon et les interactions entre la plante et le pathogène, les chercheurs peuvent estimer les risques d'infection et recommander des stratégies de lutte appropriées. Ces modèles aident les agriculteurs à identifier les facteurs qui favorisent la stabilité du système, à proposer des mesures de gestion appropriées pour prévenir les épidémies de mildiou et à prendre des décisions éclairées sur la gestion de la maladie, réduisant ainsi les pertes de récolte et les besoins en fongicides. La stabilité revêt une grande importance dans la gestion des maladies, y compris la maladie du mildiou de la pomme de terre. Une caractéristique clé de la stabilité est la capacité d'un système, comme une culture de pommes de terre, à maintenir des niveaux de performance ou de résistance face à des facteurs perturbateurs tels que les pathogènes. Dans le contexte de la maladie du mildiou, la stabilité est essentielle pour minimiser les pertes de récolte et maintenir la productivité des cultures sur le long terme. Une culture de pommes de terre stable est moins susceptible d'être gravement affectée par les épidémies de mildiou, ce qui réduit la dépendance à l'égard des traitements chimiques et les coûts associés. La stabilité permet également de garantir la sécurité alimentaire et la durabilité de la production agricole. Le contrôle optimal est une approche mathématique puissante utilisée par les chercheurs dans la gestion de la maladie du mildiou de la pomme de terre. En intégrant les modèles de propagation du champignon, les facteurs environnementaux et économiques, ainsi que les contraintes spécifiques, le contrôle optimal permet de développer des stratégies de lutte efficaces et durables, réduisant ainsi les pertes de récolte et l'impact environnemental.

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier la propagation du mildiou de la pomme de terre ainsi que le développement d'un modèle mathématique pour limiter la propagation de cette maladie. Ce travail est organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, je présente les notions et définitions fondamentales relatives aux équations différentielles, au problème de Cauchy, à la stabilité et à la fonction de Lyapunov. De plus, j'aborde des propriétés et théorèmes importants et utiles dans ce domaine. Le second chapitre est consacré aux modèles à compartiments usuelles. Le troisième chapitre

est dédié à la maladie du mildiou de la pomme de terre ; sa première apparition, ses symptômes, son cycle de développement et son traitement. Dans le quatrième chapitre, nous présentons le modèle de mildiou de la pomme de terre et l'analyse mathématique de ce modèle nous avons déterminé le nombre de reproduction de base R_0 qui exprime le nombre de cas secondaires qu'une seule pomme de terre infectieuse produit lorsqu'il est introduit dans une population particulière. Ensuite, nous avons étudié et discuté la stabilité du modèle : dans le cas de l'équilibre sans maladie (DFE) et pour l'équilibre endémique (EE). Dans le dernier chapitre, nous intégrons au modèle formulé précédemment un contrôle, visant à minimiser le nombre des individus infectés. Après avoir donné un résultat sur l'existence un contrôle optimal, nous utilisons le Principe du Maximum de Pontryagin pour caractériser la valeur optimale de la stratégie de contrôle, afin de réduire la propagation La maladie du mildiou de la pomme de terre. Finalement, ce mémoire se termine par une conclusion générale synthétise les travaux effectués au cours de notre étude.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, nous aborderons des notions, des résultats et des outils mathématiques qui seront utilisés dans la suite de ce travail. Dans la modélisation d'un grand nombre de phénomènes physiques, chimiques, biologiques, et en sciences de l'ingénieur, l'apparition des équations différentielles. Trouver la solution d'une équation différentielle est ainsi un problème courant, souvent difficile ou impossible à résoudre de façon analytique. Alors Il est nécessaire de recourir à des méthodes numériques pour résoudre ces équations différentielles.

1.1 Généralités sur les équations différentielles

Définition 1.1.1. *On appelle équation différentielle, une équation liant des dérivées d'une ou plusieurs fonctions d'une variable numérique.*

Définition 1.1.2. *Soit $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction, où I est un intervalle non vide de \mathbb{R} et U un ouvert de \mathbb{R}^n .*

On appelle équation différentielle du premier ordre associée à la fonction f l'équation suivante :

$$X'(t) = f(t, X(t)) \tag{1.1}$$

où X est une fonction d'une variable réelle à valeurs dans \mathbb{R}^n et X' sa dérivée.

Remarque 1.1.1. *Une équation différentielle autonome est une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 où la variable t n'apparaît pas explicitement. Elle s'écrit sous la forme suivante :*

$$X' = f(X).$$

Définition 1.1.3. On appelle solution d'une équation d'ordre n sur un certain intervalle I de \mathbb{R} , toute fonction X définie sur cet intervalle I , n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie 1.1 sur I .

Définition 1.1.4. Une solution de l'équation différentielle 1.1 est la donnée d'un couple (J, X) où J est un intervalle non vide de \mathbb{R} contenu dans I et X une fonction de I à valeurs dans \mathbb{R}^n dérivable sur I et vérifiant les conditions suivantes :

- 1) $(t, X(t)) \in I \times U$, $\forall t \in J$
- 2) $X'(t) = f(t, X(t))$, $\forall t \in J$

N.B : Le couple (J, X) est appelé solution locale de l'équation différentielle 1.1.

Définition 1.1.5. Soient (J_1, X_1) et (J_2, X_2) deux solutions de l'équation différentielle 1.1. On dit que (J_2, X_2) prolonge (J_1, X_1) si $J_1 \subset J_2$ et $\forall t \in J_1$ et $X_1(t) = X_2(t)$.

Définition 1.1.6. On dit qu'une solution (J, X) est maximale si elle n'admet aucun prolongement (\tilde{J}, \tilde{X}) avec J inclus strictement dans \tilde{J} .

Définition 1.1.7. Une solution globale de 1.1 est une solution définie sur I pour tout entier, i.e (I, X) est une solution globale de $X' = f(., X)$ où $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

1.2 Problème de Cauchy-Lipschitz

Définition 1.2.1. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , J est un intervalle non vide de \mathbb{R} contenu dans I et V un ouvert de \mathbb{R}^n

On appelle problème de Cauchy le problème qui s'écrit sous la forme :

$$(p) : \begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)) \\ X_0 = X(t_0) \end{cases} \text{ presque partout sur } J.$$

où $t, t_0 \in I$ et f est une fonction de $I \times V$ à valeurs dans \mathbb{R}^n .

L'équation $X'(t) = f(t, X(t))$ est un système pour $n > 1$.

$X(t_0) = X_0 \in \mathbb{R}^n$ représente la condition initiale du problème de cauchy.

Définition 1.2.2. On suppose que :

$\forall t \in I$, la fonction $X \rightarrow f(t, X)$ est mesurable.

$\forall x \in V$, la fonction $t \rightarrow f(t, X)$ est continue.

On appelle solution du problème de cauchy (p) , tout couple $(J, X(.))$, où J est un intervalle tel que $J \subset I$, $t_0 \in J$ et $X(.)$ est une fonction absolument continue de J dans V . Vérifiant, $\forall t \in J$,

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(s, X(s)) ds.$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)) \\ X_0 = X(t_0) \end{cases} \quad p.p \text{ sur } J$$

Théorème 1.2.1. Nous considérons le problème de Cauchy (P). On suppose que :

la fonction f soit continue sur $I \times V$.

la fonction f soit lipschitzienne par rapport à x :

$$\exists M > 0, \forall t \in I, \forall Y, Z \in V, \|f(t, Y) - f(t, Z)\| \leq M \|Y - Z\|$$

Alors , le problème (P) admet une solution unique définie sur I .

Définition 1.2.3. Dans le cas autonome , l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$X' = AX ,$$

Avec A est une matrice carré d'ordre n .

le problème de cauchy s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

Avec : $A \in M_n(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.2.1. 1) La matrice $X(t)$ qui a pour n colonnes solutions $X_1(t), X_2(t), X_3(t), \dots, X_n(t)$ de l'équation : $X' = AX$, s'appelle la matrice solution de l'équation

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} .$$

2) Dans le cas où $\det[X(0)] \neq 0$ pour $t \in \mathbb{R}$, l'exponentielle de la matrice At que nous notons e^{At} , est définie par :

$$e^{At} = X(t)[X(0)]^{-1},$$

où : $X(t)$ est la matrice solution de l'équation $X'(t) = AtX(t)$ avec la condition initiale $X(0) = X_0$

Il est important de noter que cette définition s'applique lorsque la matrice $X(0)$ est inversible , c'est-à-dire que son déterminant est non nul ($\det[X(0)] \neq 0$) . Dans ce cas , l'exponentielle de la matrice At représente une solution particulière de l'équation différentielle donnée.

3) La solution de $\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ est donnée par :

$$t \longrightarrow e^{At} X_0$$

4) La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

$$e^0 = I_n$$

$$e^{A(s+t)} = e^{As} e^{At}$$

$$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} = e^{At} A$$

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!}$$

1.3 Point d'équilibre

Le point d'équilibre dans les équations différentielles représente un état stable où les forces agissant sur un système sont en équilibre. C'est une solution constante qui ne dépend pas du temps. Il joue un rôle important dans l'analyse du comportement à long terme du système et permet de prédire les solutions stables et les trajectoires possibles.

Définition 1.3.1. *Les points d'équilibres ou les points critiques sont les solutions constantes de l'équation différentielle $f(t, X(t))=0$.*

1.4 Le nombre de reproduction de base R_0

Au début d'une épidémie, une des questions que l'on se pose souvent en épidémiologie mathématique est de trouver une valeur seuil qui détermine si un pathogène peut se propager dans une population lorsqu'il est introduit dans celle-ci. Ce seuil est caractérisé par le nombre de reproduction de base noté R_0 , défini comme étant le nombre moyen d'infections causé quand un individu infectieux est introduit dans une population complètement susceptible durant toute sa période d'infection. Egalement, il est utilisé pour orienter des stratégies visant à contrôler la propagation de celle-ci. Le nombre de reproduction de base est l'un des concepts clé en épidémiologie et il est incontestablement l'une des idées les plus précieuses que la pensée mathématique a apporté à la théorie de l'épidémie. Le R_0 est déterminé par divers facteurs tels que la virulence de l'agent infectieux, le mode de transmission de la maladie, la durée de la période infectieuse et la probabilité de transmission par contact entre individus.

Définition 1.4.1. *Le nombre de reproduction de base pour une infection, R_0 ; est une mesure du potentiel de transmission et est généralement dé-*

fini comme le nombre moyen de cas secondaires qu'un cas infecté typique va provoquer dans une population sans immunité en l'absence d'interventions.

Au niveau microscopique, le nombre de reproduction R_0 est le nombre moyen des infections secondaires produites par un individu infecté durant la période d'infection, où les individus sont non infectés.

Au niveau macroscopique, le nombre de reproduction R_0 est le nombre moyen des infections secondaires produites par une cellule infectée durant la période d'infection, où les cellules sont non infectés.

Corollaire 1.4.1. *Si $R_0 \leq 1$ Alors, le point sans maladie est globalement stable c'est-à-dire que la maladie disparaîtra de la population.*

Corollaire 1.4.2. *Si $R_0 > 1$ Alors, le point endémique est globalement stable c'est-à-dire que la maladie peut se propager dans la population.*

1.5 Stabilité

La stabilité des systèmes est un concept fondamental dans de nombreux domaines, tels que les mathématiques, l'ingénierie et les sciences physiques. Elle concerne la capacité d'un système à maintenir son équilibre ou à revenir à un état d'équilibre après avoir subi une perturbation.

Un système est considéré comme stable lorsque ses réponses sont limitées et prévisibles, même en présence de perturbations externes ou internes. La stabilité est étroitement liée à la notion d'équilibre, où les forces ou les facteurs en jeu dans le système se compensent mutuellement.

Il existe différents types de stabilité dans les systèmes, tels que la stabilité asymptotique, la stabilité exponentielle et la stabilité marginale. Chacun de ces types de stabilité caractérise la façon dont un système réagit aux perturbations et à sa capacité à revenir à un état d'équilibre.

Définition 1.5.1. *Soit $\tilde{X}(t)$ une solution quelconque de l'équation 1.1. $\tilde{X}(t)$ est dite stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$ telle que pour toute solution $X(t)$ de l'équation différentielle $f(t, X(t)) = 0$ vérifiant :*

$$\|X(t_0) - \tilde{X}(t_0)\| \leq \gamma, \text{ alors } \|X(t) - \tilde{X}(t)\| \leq \varepsilon \text{ pour tout } t > t_0, t_0 \in \mathbb{R}^+$$

Définition 1.5.2. *Une solution $\tilde{X}(t)$ est dite asymptotiquement stable si cette solution est stable et s'il existe une constante $\omega > 0$ telle que :*

$$\text{si } \|X(t_0) - \tilde{X}(t_0)\| \leq \omega \text{ Alors } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - \tilde{X}(t)\| = 0$$

Théorème 1.5.1. *Une condition nécessaire pour que le seul point d'équilibre 0 de l'équation $X'=AX$ stable est que les valeurs propres de A soient toutes à partie réelle négative ou nulle.*

Théorème 1.5.2. *Une condition nécessaire et suffisante de stabilité de la solution nulle de l'équation $X'=AX$ est que les valeurs propres de A soient toutes à partie réelle négative ou nulle et pour toute valeur propre λ telle que $Re\lambda = 0$, la dimension du sous espace propre correspondant est égale à la multiplicité de la valeur propre.*

Théorème 1.5.3. *Une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique de la solution nulle de l'équation $X'=AX$ est que toutes les valeurs propres de A soient à partie réelle strictement négative.*

Théorème 1.5.4. *Le point d'équilibre \tilde{X} de l'équation : $X' = f(X)$ est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(\tilde{X})$ ont une partie réelle négative.*

Définition 1.5.3. *Si au moins l'une des valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(X)$ a une partie réelle positive, Alors le point d'équilibre \tilde{X} de l'équation différentielle $X' = f(X)$ est instable.*

1.6 Critère de Routh-Hurwitz

Le Critère de Routh-Hurwitz consiste à examiner les coefficients du polynôme caractéristique de la linéarisé classique.

Théorème 1.6.1. *Soit P un polynôme tel que $a_0 > 0$. Pour que P soit uniformément asymptotiquement stable, il faut que les déterminants principaux de la matrice Hurwitz soient strictement positifs ($\Delta_i > 0, i \in 0, 1, 2, \dots, n$).*

La stabilité d'un système linéaire autonome est liée à la nature des valeurs propres de la matrice H_n et qui sont solutions d'une équation de la forme

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (1.2)$$

Posons

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

La matrice H_n s'appelle la matrice de Routh-Hurwitz. Routh-Hurwitz donnent le résultat suivant.

Théorème 1.6.2. *Toutes les racines de (1.2) aient une partie réelle strictement négative si et seulement si les mineurs diagonaux Δ_k , avec $k \in \{1, \dots, n\}$ de la matrice (1.3) soient strictement positif*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \cdot \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix},$$

pour $k \in \{1, \dots, n\}$ les coefficients à indices supérieurs à n ou inférieurs à 0 sont remplacés par 0 avec la convention $a_0 = 1$.

Corollaire 1.6.1. *pour $n=4$,*

Soit $P(X) = a_0X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4$, On trouve la matrice de Hurwitz :

$$H_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$$

Le critère de Routh-Hurwitz s'énonce comme-suit :

Soit $P(X) = a_0X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4$, pourque le polynome P soit uniformément asymptotiquement stable, il faut et il suffit que $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ et Δ_4 seront strictements positives ; c'est-à-dire :

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} > 0$$

Quand $a_0 > 0$ une condition nécessaire pour que toutes les racines du polynôme caractéristique admettes une partie réelle négative il faut que tous les coefficients doivent être positifs c'est-à-dire : $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$.

1.7 Fonction de Lyapunov

Définition 1.7.1. *S'il existe une valeur propre à partie réelle nulle, on ne peut pas confirmer la stabilité ou l'instabilité du système par la linéarisation. Dans ce cas pour la détermination de la stabilité le mathématicien russe Alexandre Lyapunov a présenté un outil efficace. c'est les fonctions de Lyapunov.*

Définition 1.7.2. Soit une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction candidate de Lyapunov Si :

$$V(0) = 0$$

$\forall x \in U \setminus \{0\} \quad V(x) > 0$, pour un certain voisinage U de l'origine.

La dérivée \dot{V} d'une fonction V le long du champ de vecteurs f est définie par $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$ où : $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans l'espace considéré et ∇ l'opérateur gradient.

Si de plus , la fonction candidate de Lyapunov vérifie : $\forall x \in W \setminus \{0\} \quad \dot{V}(x) \leq 0$ pour un certain voisinage W de l'origine, On dit que V est une fonction de Lyapunov.

Définition 1.7.3. Soit \tilde{x} un point d'équilibre et v une fonction continue définie sur un voisinage de \tilde{x} $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} , différentiable sur $U \setminus \{\tilde{x}\}$ tel que : $V(\tilde{x}) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq \tilde{x}$ $\dot{V}(x) \leq 0$ sur $U \setminus \{\tilde{x}\}$ Alors : \tilde{x} est stable.

Définition 1.7.4. Si \tilde{x} est stable et $\dot{V}(x) < 0$ sur $U \setminus \{\tilde{x}\}$, Alors \tilde{x} est asymptotiquement stable.

Dans ce chapitre, nous avons présenté des notions et des définitions de base qui concernent les équations différentielles, le problème de Cauchy, la stabilité et la fonction de Lyapunov. Ainsi que des propriétés et des théorèmes qui seront importants et utiles dans ce mémoire.

Chapitre 2

Les modèles à compartiments classiques

2.1 Modèle épidémiologique

Un modèle épidémiologique est formé de deux concepts : les compartiments qui divisent la population en divers états possibles par rapport à la maladie et les règles qui spécifient la proportion des individus passant d'un compartiment à un autre . Cette modélisation permet de clarifier les suppositions, les variables et les paramètres quelque fois très complexes. L'analyse mathématique fournit des résultats servant à comprendre la nature de la maladie étudiée, son évolution et sa transmission.

En épidémiologie, les termes suivant sont couramment utilisés ;

S : représente les individus Susceptibles

I : représente infectés

R : représente les individus rétablies

E : représente les individus exposés

N : représente la population totale

2.2 Les modèles à deux compartiments

2.2.1 Modèle à compartiment SI

En 1906, W.Hamer a introduit le modèle SI qui est appelé aussi le modèle déterministe simple dont les sujets infectés le restent toujours autrement dit qu'il n'y a ni guérison ni décès de plus les populations d'individus saines et d'individus infectées sont en permanence. Ce modèle comporte deux compartiments :

S (t) : saines ou susceptibles c'est à dire les individus qui ne sont pas

contamnés mais peuvent le devenir.

$I(t)$: infectés c'est à dire les individus qui sont atteints par la maladie étudiée.

Un flux s'établit entre S et I qui dépend du nombre d'individus susceptibles, le nombre des individus infectés et le taux de contagion α .

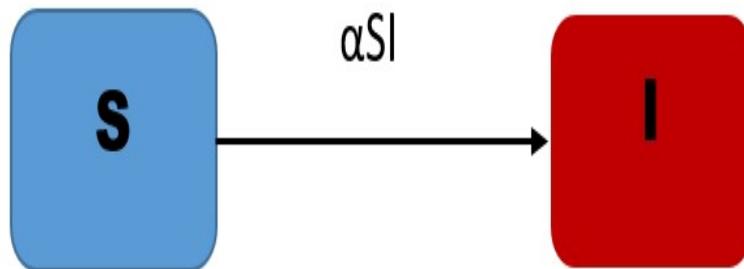
Ce modèle est considérée comme-suit : $S \longrightarrow I$

Ce modèle est représenté par le système des équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha S(t)I(t) \\ I'(t) = \alpha S(t)I(t) \end{cases}$$

Avec $N(t) = S(t)+I(t)$ est la population totale et il est constant à travers le temps t .

La représentation compartimentale du modèle mathématique :



2.2.2 Modèle à compartiment SIS

le modèle SIS est un modèle dérivée du modèle SIR dont la maladie n'est pas dangereuse car au bout d'un certain temps, les individus infectés redeviennent susceptibles.

Ce modèle est considérée comme-suit : $S \longrightarrow I \longrightarrow S$

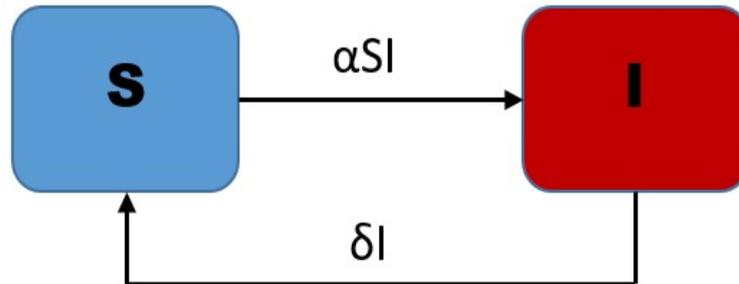
Ce modèle est représenté par le système des équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha S(t)I(t) + \delta I(t) \\ I'(t) = \alpha S(t)I(t) - \delta I(t) \end{cases}$$

avec : α représente le taux d'infection et δ représente le taux de chaque

infecté guérit

La représentation compartimentale du modèle mathématique :



2.3 Les modèles à trois compartiments

2.3.1 Modèle à compartiment SIR

En 1927, William Ogilvy Kermack et Anderson Gray McKendrick ont publié un modèle dont lequel la population est divisé entre les individus Susceptibles (compartiment S) , les individus infectées (compartiment I) et les individus rétablies (compartiment R) et ce modèle ne contient que deux paramètres : α le taux d'infection et le taux de retrait (appelé aussi taux de guérison) μ dont les valeurs sont estimées à partir des données observées.

Les compartiments utilisés dans ce modèle consise trois classes :

$S(t)$ qui représente le nombre des individus n'ayant pas encore été inféc-tés à l'instant t autrement dit le nombre des individus sains .

$I(t)$ qui représente le nombre des individus inféc-tés par la maladie à l'ins-tant t .

$R(t)$ qui représente le nombre des individus inféc-tés et qui ont subit un traitement pour se rétablir.

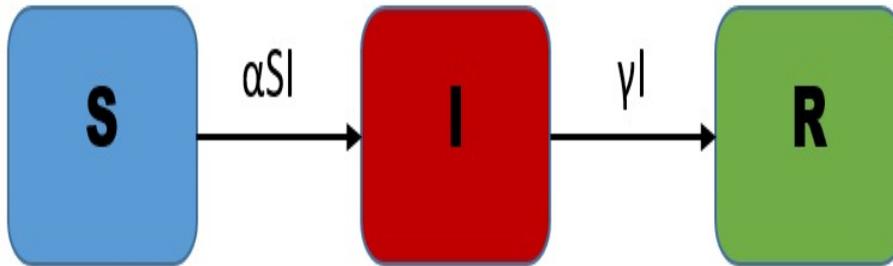
Ce modèle est considérée comme-suit : $S \longrightarrow I \longrightarrow R$

Ce modèle est représenté par le système des équations différentielles sui-vant :

$$\begin{cases} S'(t) &= -\alpha S(t)I(t) \\ I'(t) &= \alpha S(t)I(t) - \mu I(t) \\ R'(t) &= \mu I(t) \end{cases}$$

Avec $N(t) = S(t)+I(t)+R(t)$, α est le taux de transmission , μ est le taux de guérison , le terme $\alpha S(t)I(t)$ est le nombre de contacts entre les suscptibles et les infectés.

La représentation compartimentale du modèle mathématique :



2.3.2 Modèle à compartiment SIRS

le modèle SIRS est une extension du modèle SIR.

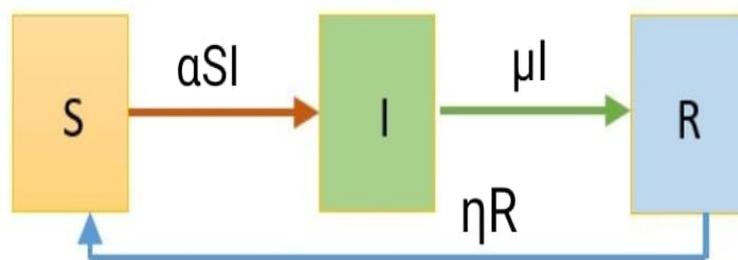
Ce modèle est considéré comme-suit : $S \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow S$

Ce modèle est représenté par le système des équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha S(t)I(t) + \eta R(t) \\ I'(t) = \alpha S(t)I(t) - \mu I(t) \\ R'(t) = \mu I(t) - \eta R(t) \end{cases}$$

Avec : α est le taux de transmission , μ est le taux de guérison , le terme η est le taux de perte d'immunité.

La représentation compartimentale du modèle mathématique :



2.3.3 Modèle à compartiment SEI

Dans le modèle SEI, on a l'appartion du compartiment E qui représente les individus exposés . Dans ce modèle avant que les sous-populations susceptibles vont à la boîte I , il nécessite de passer une

période de latence ou d'incubation

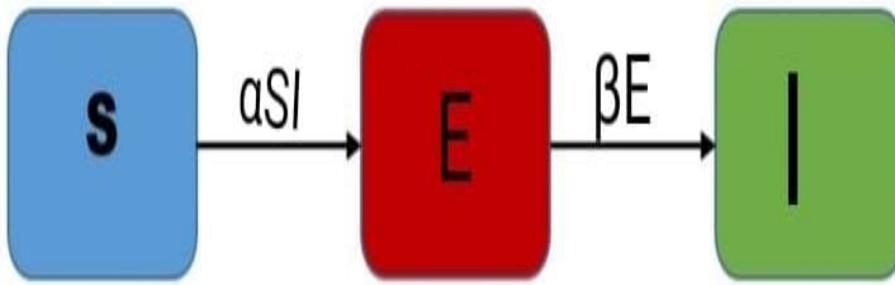
Ce modèle est considéré comme-suit : $S \longrightarrow E \longrightarrow I$

Ce modèle est représenté par le système des équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha S(t)I(t) \\ E'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta E(t) \\ I'(t) = \beta E(t) \end{cases}$$

Avec : α est le taux d'incubation.

La représentation compartimentale du modèle mathématique :



2.4 Le modèle à quatre compartiments

2.4.1 Modèle à compartiment SEIR

le modèle SEIR divise la population en quatre compartiments S c-à-d Succesptible ou saine , exposé noté par E , infecté noté par I et R qui désigne rétabli .

Ce modèle est considéré comme-suit : $S \longrightarrow E \longrightarrow I \longrightarrow R$

Ce modèle est représenté par le système des équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha S(t)I(t) \\ E'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta E(t) \\ I'(t) = \beta E(t) - \mu I(t) \\ R'(t) = \mu I(t) \end{cases}$$

avec $N(t)=S(t)+E(t)+I(t)+R(t)$

La représentation compartimentale du modèle mathématique :



Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques modèles à compartiments où le chercheur revient toujours pour modéliser des nouveaux modèles tel que : SI, SIS, SIR, SIRS, SEI, SEIR accompagné par leurs systèmes des équations différentielles .

Chapitre 3

Le mildiou du pomme de la terre

3.1 Introduction sur le mildiou

À partir de 1843 aux États-Unis et à partir de 1845 en Europe, les cultures de pommes de terre ont été victimes d'une maladie qui attaquait le feuillage et les tubercules, causant d'importants dégâts. Cette maladie, connue sous le nom de mildiou, est une maladie cryptogamique causée par une moisissure présente dans toutes les régions du monde. Cependant, elle est plus fréquente dans les régions montagneuses ou les basses-terres où les conditions climatiques sont fraîches et humides, avec des températures variant entre 15 et 20°C, bien qu'elle puisse également se développer dans des températures plus chaudes, entre 10 et 25°C, ainsi qu'avec une forte hygrométrie (90%).

Le mildiou a été à l'origine de la grande famine de 1845-1849 en Irlande. Cette maladie est causée par un champignon parasite appelé *Phytophthora infestans*, qui appartient à la classe des Phycomycètes et à la famille des Pythiacées. *Phytophthora infestans* a un caractère infectieux explosif, se propageant rapidement et provoquant le développement de la maladie en seulement 3 à 5 jours lorsque les conditions sont favorables.

N.B : Dans les régions où les pluies sont bien marquées, Un changement de la période de plantation peut favoriser une réduction de la gravité de la maladie.

3.2 Les symptômes du mildiou de la pomme de terre :

le mildiou de la pomme de terre atteint les feuilles, les tiges et les tubercules.

3.2.1 Les symptômes du mildiou sur les feuilles :



Au niveau des feuilles : L'apparition des petites taches décolorées apparaît sur les feuilles variants du vert pale au vert foncé qui se transforme par la suite en lésions brunes ou noires. Ces lésions commencent fréquemment aux pointes des feuilles ou sur les bords.

3.2.2 Les symptômes du mildiou sur les tiges :



Au niveau des tiges : A partir des feuilles les lésions peuvent se développer en surface ou à l'intérieur des pétioles ou des tiges ainsi que

Au premier, la maladie apparaît au foyers isolés après elle s'étend rapidement à l'ensemble de la plantation. Les zoospores se conservent sur les débris de pommes de terre ou les tubercules malades qui en germant, donnent naissance à des pousses contaminées. La maladie se transmet ensuite aux autres parcelles par le vent qui entraîne les zoospores, parfois sur de très longues distances. Le mildiou peut également se conserver dans le sol sous forme d'oospores qui contamineront directement la culture de pomme de terre en place. En résumé, la maladie se développe et se répand plus rapidement par températures fraîches et en cas d'atmosphère humide. Dans de telles conditions, La durée du cycle infectieux est alors de 3 à 5 jours.

3.4 Les conséquences et le traitement du mildiou :

l'infection et le développement du mildiou sont favorisés par les conditions climatiques humides ainsi que lorsque la variété du pomme de terre est sensible. Comme toutes les maladies, le mildiou de pommes de terres peut entraîner des pertes de rendements pouvant aller jusqu'à 70 ou 80% de la récolte et parfois une perte de récolte totale en cas de perte manifestation. Ce qui pousse les agriculteurs à traiter cette maladie par des techniques favorisant un assèchement rapide du feuillage et réduisant l'humidité dans la culture qui tend à réduire le développement de la maladie. Ces techniques comprennent les distances de plantation, la destruction du feuillage avant la récolte et de le laisser complètement se dessécher ce qui réduit les possibilités d'infection des tubercules à la récolte . Ainsi que à la récolte les tubercules doivent être mûrs et le sol doit être sec. Et pour la lutte contre cette maladie les agriculteurs utilisent un fongicide foliaire selon les précautions d'emploi. Il existe plusieurs produits contre Mildiou tels que les fongicides de contact comme les dithiocarbamates (produits à base de cuivre manèbe, mancozèbe, fluazinam...), fongicides pénétrants (cymoxanil...), diffusants (dimétomorph, propamocarbe...) ou systémiques (métalaxyl, oxadixil...). Et L'application des produits doit être raisonnable et elle doit être en fonction du niveau et du type de risque d'infection épidémique, du risque de résistance à certains fongicides et de la sensibilité de la variété cultivée.



Dans ce chapitre, nous avons présenté une petite introduction sur le mildiou de la pomme de terre, ses symptômes, les conditions favorables de son développement, ses conséquences ainsi que les méthodes pour traiter cette maladie.

Chapitre 4

L'analyse mathématique du modèle SEIR

4.1 Introduction

Pour étudier la propagation et le contrôle du mildiou de la pomme de terre, le chercheur doit connaître toutes les caractéristiques de la maladie afin d'estimer et de représenter celle-ci sous la forme d'un modèle. Nous allons créer un modèle aussi réaliste que possible pour simuler la réalité et obtenir des résultats corrects. Pour cela, nous travaillons sur le modèle SEIR (Susceptible, Exposé, Infecté et Rétabli).

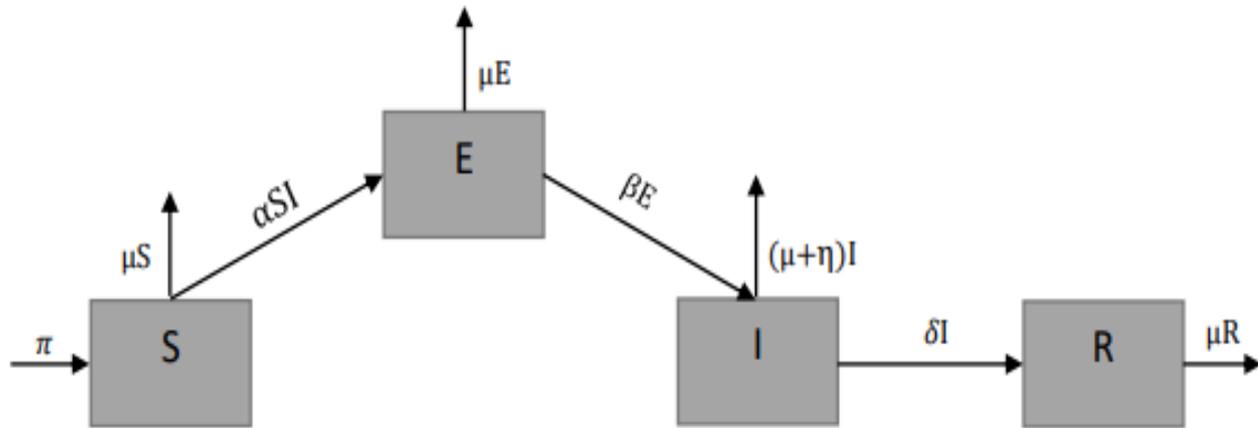
4.2 La formulation du modèle

Le modèle SEIR est le plus approprié pour simuler le mildiou de la pomme de terre. Premièrement, nous considérons la population totale au temps t , notée $N(t)$, qui est subdivisée en différentes catégories : les pommes de terre susceptibles $S(t)$, qui sont capables d'être infectées ; les pommes de terre exposées $E(t)$, qui se trouvent dans la période d'incubation ; les pommes de terre infectieuses $I(t)$, qui sont effectivement infectées par la maladie ; et enfin les pommes de terre rétablies $R(t)$, qui représentent les individus guéris.

Avec

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$$

L'illustration ci-dessous présente le diagramme du modèle proposé pour la dynamique de la maladie du mildiou de la pomme de terre :



La population étudiée à l'instant t se compose de pommes de terre qui sont réparties en quatre classes notées : $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ et $R(t)$.

Où

$S(t)$: représente le nombre de pommes de terres susceptibles.

$E(t)$: représente le nombre de pommes de terres exposés.

$I(t)$: représente le nombre de pommes de terres infectés par le mildiou.

$R(t)$: représente le nombre de pommes de terres rétablis du mildiou.

Et les paramètres du modèle :

π : représente le taux de natalité.

α représente le taux d'incubation de la maladie du mildiou de la pomme de terre.

μ : représente le taux de mortalité naturelle.

β : représente le taux d'infection.

η : représente le taux de mortalité induite par la maladie du mildiou de la pomme de terre.

γ : représente le taux de guérison.

Nous nous intéressons à l'étude du modèle mathématique SEIR suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = \pi - \alpha S(t)I(t) - \mu S(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \alpha S(t)I(t) - (\beta + \mu)E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta E(t) - (\gamma + \mu + \eta)I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{array} \right.$$

Avec les conditions initiales :

$$S(0) = S_0 \geq 0, E(0) = E_0 \geq 0, I(0) = I_0 \geq 0 \text{ et } R(0) = R_0 \geq 0$$

4.3 Analyse des équilibres de modèle :

Les équilibres de ce modèle sont composés de deux états d'équilibre :

* Le point d'équilibre sans maladie (où la maladie est absente dans la population).

*Le point d'équilibre endémique (où la maladie persiste dans la population).

4.3.1 Point d'équilibre sans maladie :

La condition pour qu'il n'y ait pas de maladie dans une population est que $E(t) = 0$ et $I(t) = 0$. On note ce point d'équilibre comme étant " E_f ". En remplaçant $E(t)$ et $I(t)$ par 0 dans la quatrième équation, nous obtenons :

$$\frac{dR(t)}{dt} = 0 \rightarrow -\mu R(t) = 0 \rightarrow R(t) = 0 \text{ (car } \mu \neq 0)$$

$$\text{Par conséquent, } \frac{dS(t)}{dt} = \pi - \mu S(t) = 0 \rightarrow S(t) = \frac{\pi}{\mu}$$

$$\text{Alors, } E_f = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0\right)$$

4.3.2 Point d'équilibre endémique :

On note ce point d'équilibre par EE telque : $EE = (S^*, E^*, I^*, R^*)$. L'obtention de ce point tend vers la résolution des équations suivantes :

$$\pi - \alpha S(t)I(t) - \mu S(t) = 0$$

$$\alpha S(t)I(t) - (\beta + \mu)E(t) = 0$$

$$\beta E(t) - (\gamma + \mu + \eta)I(t) = 0$$

$$\gamma I(t) - \mu R(t) = 0$$

D'après la 2eme équation on a : $\alpha S(t)I(t) = (\beta + \mu)E(t)$ On remplace $\alpha S(t)I(t)$ par $(\beta + \mu)E(t)$ dans la 1ere équation. On aura :

$$\pi - (\beta + \mu)E(t) - \mu S(t) = 0$$

$$\alpha S(t)I(t) - (\beta + \mu)E(t) = 0$$

$$\beta E(t) - (\gamma + \mu + \eta)I(t) = 0$$

$$\gamma I(t) - \mu R(t) = 0$$

D'après la 1ere équation on a : $S(t) = \frac{\pi}{\mu} - (1 + \frac{\beta}{\mu})E(t)$. On remplace $S(t)$ par $\frac{\pi}{\mu} - (1 + \frac{\beta}{\mu})E(t)$ dans la 2eme équation. On aura :

$$\pi - (\beta + \mu)E(t) - \mu S(t) = 0$$

$$\alpha(\frac{\pi}{\mu} - (1 + \frac{\beta}{\mu})E(t))I(t) - (\beta + \mu)E(t) = 0$$

$$\beta E(t) - (\gamma + \mu + \eta)I(t) = 0$$

$$\gamma I(t) - \mu R(t) = 0$$

D'où :

$$\pi - (\beta + \mu)E(t) - \mu S(t) = 0$$

$$\frac{\alpha\pi}{\mu}I(t) - \alpha(1 + \frac{\beta}{\mu})E(t)I(t) - (\beta + \mu)E(t) = 0$$

$$\beta E(t) - (\gamma + \mu + \eta)I(t) = 0$$

$$\gamma I(t) - \mu R(t) = 0$$

D'après la 3eme équation, On a : $E(t) = \frac{\gamma + \mu + \eta}{\beta}I(t)$. On remplace $E(t)$ par $\frac{\gamma + \mu + \eta}{\beta}I(t)$ dans la 2eme équation.

Donc :

$$\pi - (\beta + \mu)E(t) - \mu S(t) = 0$$

$$\frac{\alpha\pi}{\mu}I(t) - \alpha(1 + \frac{\beta}{\mu})(\frac{\gamma + \mu + \eta}{\beta}I(t))I(t) - (\beta + \mu)(\frac{\gamma + \mu + \eta}{\beta}I(t)) = 0$$

$$\beta E(t) - (\gamma + \mu + \eta)I(t) = 0$$

$$\gamma I(t) - \mu R(t) = 0$$

D'après la 2eme équation, On a : $\frac{\alpha\pi}{\mu} - (\beta + \mu) \frac{\gamma + \mu + \eta}{\beta} - \alpha \left(1 + \frac{\beta}{\mu}\right) \frac{\gamma + \mu + \eta}{\beta} I(t) = 0$

$$\text{Donc : } I^* = \frac{\alpha\pi\beta - \mu(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \eta)}{\alpha(\mu + \beta)(\gamma + \mu + \eta)} = \frac{-\mu}{\alpha} + \frac{\pi\beta}{(\mu + \beta)(\gamma + \mu + \eta)}$$

On remplace I(t) par $\frac{-\mu}{\alpha} + \frac{\pi\beta}{(\mu + \beta)(\gamma + \mu + \eta)}$ Dans la 3eme équation On aura :

$$E^* = \frac{-\mu(\gamma + \mu + \eta)}{\alpha\beta} + \frac{\pi}{\mu + \beta}.$$

Et dans la 4eme équation on aura : $R^* = \frac{-\gamma}{\alpha} + \frac{\pi\beta\gamma}{\mu(\mu + \beta)(\gamma + \mu + \eta)}$

En remplaçant E(t) par $\frac{-\mu(\gamma + \mu + \eta)}{\alpha\beta} + \frac{\pi}{\mu + \beta}$ dans la 1ere équation On aura :

$$S^* = \frac{(\mu + \beta)(\gamma + \mu + \eta)}{\alpha\beta}$$

$$\text{Donc : } EE = \left(\frac{(\mu + \beta)(\gamma + \mu + \eta)}{\alpha\beta}, \frac{-\mu(\gamma + \mu + \eta)}{\alpha\beta} + \frac{\pi}{\mu + \beta}, \frac{-\mu}{\alpha} + \frac{\pi\beta}{(\mu + \beta)(\gamma + \mu + \eta)}, \frac{-\gamma}{\alpha} + \frac{\pi\beta\gamma}{\mu(\mu + \beta)(\gamma + \mu + \eta)} \right)$$

4.4 Nombre de reproduction de base R_0

$$\text{On a : } \alpha\pi\beta - \mu(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \eta) > 0$$

$$\text{Donc : } \alpha\pi\beta > \mu(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \eta)$$

et par la suite :

$$R_0 = \frac{\alpha\pi\beta}{\mu(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \eta)}$$

et :

$$EE = \left(\frac{\pi}{\mu R_0}, \frac{\pi(R_0 - 1)}{(\mu + \beta)R_0}, \frac{\mu}{\alpha}(R_0 - 1), \frac{(R_0 - 1)\gamma}{\alpha} \right)$$

Il est clair que la solution unique positive existe seulement si $R_0 > 1$ qui signifie qu'il y a un unique point d'équilibre endémique.

4.5 Analyse de la stabilité des points d'équilibres du modèle

4.5.1 La stabilité du point d'équilibre sans maladie

On calcule d'abord la matrice jacobienne associée au système :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \pi - \alpha S(t)I(t) - \mu S(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \alpha S(t)I(t) - (\beta + \mu)E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta E(t) - (\gamma + \mu + \eta)I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{cases}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\alpha I - \mu & 0 & -\alpha S & 0 \\ \alpha I & -(\beta + \mu) & \alpha S & 0 \\ 0 & \beta & -(\gamma + \mu + \eta) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre sans maladie $E_f = (\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0)$ la matrice vaut :

$$A = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\alpha \frac{\pi}{\mu} & 0 \\ 0 & -(\beta + \mu) & \alpha \frac{\pi}{\mu} & 0 \\ 0 & \beta & -(\gamma + \mu + \eta) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est : $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Avec

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\mu - \lambda & 0 & -\alpha \frac{\pi}{\mu} & 0 \\ 0 & -(\beta + \mu) - \lambda & \alpha \frac{\pi}{\mu} & 0 \\ 0 & \beta & -(\gamma + \mu + \eta) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu - \lambda \end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = -(\lambda + \mu) \begin{vmatrix} -(\beta + \mu) - \lambda & \alpha \frac{\pi}{\mu} & 0 \\ \beta & -(\gamma + \mu + \eta) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu - \lambda \end{vmatrix} - \alpha \frac{\pi}{\mu} \begin{vmatrix} 0 & -(\beta + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - \lambda \end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = -(\lambda + \mu) [-(\lambda + \beta + \mu) \begin{vmatrix} -(\gamma + \mu + \eta) - \lambda & 0 \\ \gamma & -\mu - \lambda \end{vmatrix} - \alpha \frac{\pi}{\mu} \begin{vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\mu - \lambda \end{vmatrix}]$$

$$P_A(\lambda) = (\lambda + \mu) [(\lambda + \beta + \mu)(\lambda + \gamma + \mu + \eta)(\lambda + \mu) - \alpha \frac{\pi}{\mu} \beta (\lambda + \mu)]$$

$$P_A(\lambda) = (\lambda + \mu)^2 [(\lambda + \beta + \mu)(\lambda + \gamma + \mu + \eta) - \alpha \frac{\pi}{\mu} \beta]$$

$$P_A(\lambda) = (\mu + \lambda)^2 [\lambda^2 + (\beta + \gamma + \eta + 2\mu)\lambda + (\beta + \mu)(\gamma + \mu + \eta)(1 - R_0)]$$

$$P_A(\lambda) = (\mu^2 + \lambda^2 + 2\mu\lambda) [\lambda^2 + (\beta + \gamma + \eta + 2\mu)\lambda + (\beta + \mu)(\gamma + \mu + \eta)(1 - R_0)]$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 + (\beta + \gamma + \eta + 2\mu)\lambda^3 + (\beta + \mu)(\gamma + \mu + \eta)(1 - R_0)\lambda^2 + 2\mu\lambda^3 + 2\mu(\beta + \gamma + \eta + 2\mu)\lambda^2 + 2\mu(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \eta)(1 - R_0)\lambda + \mu^2\lambda^2 + \mu^2(\beta + \gamma + \eta + 2\mu)\lambda + \mu^2(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \eta)(1 - R_0)$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 + (\beta + \gamma + \eta + 4\mu)\lambda^3 + [(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \eta)(1 - R_0) + [2\mu(\beta + \gamma + \eta + 2\mu) + \mu^2]]\lambda^2 + [2\mu(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \eta)(1 - R_0) + \mu^2(\beta + \gamma + \eta + 2\mu)]\lambda + \mu^2(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \eta)(1 - R_0)$$

En appliquant le théoreme de Routh-Hurwitz, On pose :

$$P_A(\lambda) = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$$

Avec

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \beta + \gamma + \eta + 4\mu \\ a_2 &= 2\mu(\beta + \gamma + \eta + 2\mu) + \mu^2 \\ a_3 &= 2\mu(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \eta)(1 - R_0) + \mu^2(\beta + \gamma + \eta + 2\mu) \\ a_4 &= \mu^2(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \eta)(1 - R_0) \end{aligned}$$

Il est clair que $a_i > 0 \forall i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ pour $1-R_0 > 0$

Donc la condition nécessaire du théoreme de Routh-Hurwitz est vérifiée.

On a la matrice de Hurwitz qui est donnée par :

$$H_4 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$$

Les déterminants principaux de la matrice de Hurwitz sont données par :

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

On a $\Delta_1 = a_1 > 0$

On a $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0$

On a $\Delta_3 = -a_1^2 + a_3 \Delta_2 > 0$

On a $\Delta_4 = a_4 \Delta_3 > 0$

D'après le théoreme de Routh-Hurwitz, toutes les valeurs propre du polynôme caractéristique P_A admettes une partie réelle négative Et par la suite le point d'équilibre sans maladie

$$E_f = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0\right)$$

est localement asymptotiquement stable , si $R_0 < 1$.

4.5.2 La stabilité de point d'équilibre endémique

Soit le point d'équilibre endémique

$$EE = \left(\frac{(\mu+\beta)(\gamma+\mu+\eta)}{\alpha\beta}, \frac{-\mu(\gamma+\mu+\eta)}{\alpha\beta} + \frac{\pi}{\mu+\beta}, \frac{-\mu}{\alpha} + \frac{\pi\beta}{(\mu+\beta)(\gamma+\mu+\eta)}, \frac{-\gamma}{\alpha} + \frac{\pi\beta\gamma}{\mu(\mu+\beta)(\gamma+\mu+\eta)}\right)$$

On a la matrice jacobienne associe au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = \pi - \alpha S(t)I(t) - \mu S(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \alpha S(t)I(t) - (\beta + \mu)E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta E(t) - (\gamma + \mu + \eta)I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{array} \right.$$

est

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha I - \mu & 0 & -\alpha S & 0 \\ \alpha I & -(\beta + \mu) & \alpha S & 0 \\ 0 & \beta & -(\gamma + \mu + \eta) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix}$$

On calcule d'abord la matrice jacobienne associe au système au point d'équilibre endémique EE $EE = (\frac{\pi}{\mu R_0}, \frac{\pi(R_0-1)}{(\mu+\beta)R_0}, \frac{\mu}{\alpha}(R_0 - 1), \frac{(R_0-1)\gamma}{\alpha})$, la matrice vaut :

$$B = \begin{pmatrix} -\mu R_0 & 0 & -\frac{\alpha\pi}{\mu R_0} & 0 \\ \mu(R_0 - 1) & -(\beta + \mu) & \frac{\alpha\pi}{\mu R_0} & 0 \\ 0 & \beta & -(\gamma + \mu + \eta) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix}$$

Le polynome caractéristique de cette matrice est : $P_B(x) = \det(B - xI)$
Avec :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\mu R_0 - \lambda & 0 & -\frac{\alpha\pi}{\mu R_0} & 0 \\ \mu(R_0 - 1) & -(\beta + \mu) - \lambda & \frac{\alpha\pi}{\mu R_0} & 0 \\ 0 & \beta & -(\gamma + \mu + \eta) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu - \lambda \end{vmatrix}$$

$$P_B(\lambda) = -(\lambda + \mu) \begin{vmatrix} -\mu R_0 - \lambda & 0 & -\frac{\alpha\pi}{\mu R_0} \\ \mu(R_0 - 1) & -(\beta + \mu) - \lambda & \frac{\alpha\pi}{\mu R_0} \\ 0 & \beta & -(\gamma + \mu + \eta) - \lambda \end{vmatrix}$$

$$P_B(\lambda) = -(\lambda + \mu)[-(\lambda + \mu R_0) \begin{vmatrix} -(\beta + \mu) - \lambda & \frac{\alpha\pi}{\mu R_0} \\ \beta & -(\gamma + \mu + \eta) - \lambda \end{vmatrix} - \frac{\alpha\pi\beta}{R_0}(R_0 - 1)]$$

$$P_B(\lambda) = (\lambda + \mu)[(\lambda + \mu R_0)((\lambda + \gamma + \mu + \eta)(\lambda + \mu + \beta) - \frac{\alpha\pi\beta}{\mu R_0}) + \alpha\pi\beta - \frac{\alpha\pi\beta}{R_0}]$$

$$P_B(\lambda) = (\lambda + \mu)[(\lambda + \mu R_0)(\lambda + \gamma + \mu + \eta)(\lambda + \mu + \beta) - \frac{\alpha\pi\beta}{\mu R_0}(\lambda + \mu R_0) + \alpha\pi\beta - \mu(\gamma + \mu + \eta)(\mu + \beta)]$$

$$P_B(\lambda) = (\lambda + \mu)[(\lambda + \mu R_0)(\lambda + \gamma + \mu + \eta)(\lambda + \mu + \beta) - \frac{\alpha\pi\beta}{\mu R_0}\lambda - \mu(\gamma + \mu + \eta)(\mu + \beta)]$$

$$P_B(\lambda) = (\lambda + \mu)[(\lambda + \mu R_0)(\lambda + \gamma + \mu + \eta)(\lambda + \mu + \beta) - (\gamma + \mu + \eta)(\mu + \beta)\lambda - \mu(\gamma + \mu + \eta)(\mu + \beta)]$$

$$P_B(\lambda) = (\lambda + \mu)[(\lambda + \mu R_0)(\lambda + \gamma + \mu + \eta)(\lambda + \mu + \beta) - (\gamma + \mu + \eta)(\mu + \beta)\lambda - \mu(\gamma + \mu + \eta)(\mu + \beta)]$$

$$P_B(\lambda) = (\lambda + \mu)[(\lambda^2 + (\beta + \mu + \mu R_0)\lambda + \mu R_0(\beta + \mu))(\lambda + \gamma + \mu + \eta) - (\gamma + \mu + \eta)(\mu + \beta)\lambda - \mu(\gamma + \mu + \eta)(\mu + \beta)]$$

$$P_B(\lambda) = (\lambda + \mu)[\lambda^3 + (\mu + \gamma + \eta)\lambda^2 + (\beta + \mu + \mu R_0)\lambda^2 + (\beta + \mu + \mu R_0)(\gamma + \mu + \eta)\lambda + \mu R_0(\beta + \mu)\lambda + \mu R_0(\beta + \mu)(\mu + \gamma + \eta) - (\gamma + \mu + \eta)(\mu + \beta)\lambda - \mu(\gamma + \mu + \eta)(\mu + \beta)]$$

$$\eta)(\mu + \beta)\lambda - \mu(\gamma + \mu + \eta)(\mu + \beta)]$$

$$P_B(\lambda) = (\lambda + \mu)[\lambda^3 + (2\mu + \gamma + \eta + \beta + \mu R_0)\lambda^2 + \mu R_0(\gamma + \mu + \eta)\lambda + \mu R_0(\beta + \mu)\lambda + \mu R_0(\beta + \mu)(\mu + \gamma + \eta) - \mu(\gamma + \mu + \eta)(\mu + \beta)]$$

$$P_B(\lambda) = (\lambda + \mu)[\lambda^3 + (2\mu + \gamma + \eta + \beta + \mu R_0)\lambda^2 + \mu R_0(\gamma + 2\mu + \beta + \eta)\lambda + \mu(\beta + \mu)(\mu + \gamma + \mu)R_0 - \mu(\gamma + \mu + \eta)(\mu + \beta)]$$

$$P_B(\lambda) = (\lambda + \mu)[\lambda^3 + (2\mu + \gamma + \eta + \beta + \mu R_0)\lambda^2 + \mu R_0(\gamma + 2\mu + \beta + \eta)\lambda + \alpha\pi\beta - \frac{\alpha\pi\beta}{R_0}]$$

$$P_B(\lambda) = (\lambda + \mu)[\lambda^3 + (2\mu + \gamma + \eta + \beta + \mu R_0)\lambda^2 + \mu R_0(\gamma + 2\mu + \beta + \eta)\lambda + \frac{\alpha\pi\beta}{R_0}(R_0 - 1)]$$

$$P_B(\lambda) = \lambda^4 + (2\mu + \gamma + \eta + \beta + \mu R_0)\lambda^3 + \mu R_0(\gamma + 2\mu + \beta + \eta)\lambda^2 + \frac{\alpha\pi\beta}{R_0}(R_0 - 1)\lambda + \mu\lambda^3 + \mu(\gamma + \eta + \beta + 2\mu + \mu R_0)x^2 + \mu^2 R_0(2\mu + \gamma + \eta + \beta)\lambda + \frac{\mu\alpha\pi\beta}{R_0}(R_0 - 1)$$

$$P_B(x) = \lambda^4 + (3\mu + \gamma + \eta + \beta + \mu R_0)\lambda^3 + \mu(\gamma R_0 + 2\mu R_0 + \beta R_0 + \eta R_0 + \gamma + \eta + \beta + 2\mu + \mu R_0)\lambda^2 + [\frac{\alpha\pi\beta}{R_0}(R_0 - 1) + \mu^2 R_0(2\mu + \gamma + \eta + \beta)]\lambda + \frac{\mu\alpha\pi\beta}{R_0}(R_0 - 1)$$

En appliquant le théoreme de Routh-Hurwitz, On pose :

$$P_B(\lambda) = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3x + a_4$$

Avec

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 3\mu + \gamma + \eta + \beta + \mu R_0 \\ a_2 &= \mu(\gamma R_0 + 2\mu R_0 + \beta R_0 + \eta R_0 + \gamma + \eta + \beta + 2\mu + \mu R_0) \\ a_3 &= [\frac{\alpha\pi\beta}{R_0}(R_0 - 1) + \mu^2 R_0(2\mu + \gamma + \eta + \beta)] \\ a_4 &= \frac{\mu\alpha\pi\beta}{R_0}(R_0 - 1) \end{aligned}$$

Il est clair que $a_i > 0 \forall i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ pour $R_0 - 1 > 0$

Donc la condition nécessaire du théoreme de Routh-Hurwitz est vérifiée.

On a la matrice de Hurwitz qui est donnée par :

$$H_4 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$$

Les déterminants principaux de la matrice de Hurwitz sont données par :

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

On a $\Delta_1 = a_1 > 0$

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 = \mu(3\mu + \gamma + \eta + \beta + \mu R_0)[\gamma + 2\mu + \beta + \eta + \mu R_0 + (\gamma + 2\mu + \beta + \eta)R_0] - \mu^2 R_0(\gamma + 2\mu + \beta + \eta) - \frac{\alpha\pi\beta}{R_0}(R_0 - 1)$$

$$\Delta_2 = \mu^2 R_0(\gamma + 2\mu + \beta + \eta) + \mu(2\mu + \gamma + \eta + \beta + \mu R_0)[\gamma + 2\mu + \beta + \eta + \mu R_0 + (\gamma + 2\mu + \beta + \eta)R_0] + \mu^2(\gamma + 2\mu + \beta + \eta + \mu R_0) - \mu^2 R_0(\gamma + 2\mu + \beta + \eta) - \frac{\alpha\pi\beta}{R_0}(R_0 - 1)$$

$$\Delta_2 = \mu(\mu + \gamma + \eta)[\gamma + 2\mu + \beta + \eta + \mu R_0 + (\gamma + 2\mu + \beta + \eta)R_0] + \mu(\mu + \beta + \mu R_0)[\gamma + 2\mu + \beta + \eta + \mu R_0 + (\gamma + 2\mu + \beta + \eta)R_0] + \mu^2(\gamma + 2\mu + \beta + \eta + \mu R_0) - \mu(\beta + \mu)(\gamma + \eta + \mu)(R_0 - 1)$$

$$\Delta_2 = \mu(\mu + \gamma + \eta)(\beta + \mu)R_0 + \mu(\mu + \gamma + \eta)(\gamma + 2\mu + \beta + \eta + \mu R_0) + \mu(\mu + \gamma + \eta)^2 R_0 + \mu(\mu + \beta + \mu R_0)(\gamma + 2\mu + \beta + \eta)R_0 + \mu(\gamma + 2\mu + \eta + \mu R_0)(\mu + \beta + \mu R_0) + \mu^2(\gamma + 2\mu + \beta + \eta + \mu R_0) - \mu(\beta + \mu)(\gamma + \eta + \mu)R_0 + \mu(\beta + \mu)(\gamma + \eta + \mu) = \mu(\gamma + 2\mu + \beta + \eta + \mu R_0)(3\mu + \gamma + \eta + \beta + \mu R_0) + \mu(\mu + \gamma + \eta)[(\mu + \gamma + \eta)R_0 + \beta + \mu] + \mu R_0(\mu + \beta + \mu R_0)(\gamma + 2\mu + \beta + \eta) > 0$$

$$\Delta_3 = -a_4 a_1^2 + a_3(a_1 a_2 - a_3)$$

$$\Delta_3 = -a_4 a_1^2 + a_3 \Delta_2 > 0$$

$$\Delta_4 = a_4 \Delta_3 > 0$$

D'après le théoreme de Routh-Hurwitz, toutes les valeurs propre du polynôme caractéristique P_B admettent une partie réelle négative Et par la suite le point d'équilibre endémique

$$EE = \left(\frac{(\mu + \beta)(\gamma + \mu + \eta)}{\alpha\beta}, \frac{-\mu(\gamma + \mu + \eta)}{\alpha\beta} + \frac{\pi}{\mu + \beta}, \frac{-\mu}{\alpha} + \frac{\pi\beta}{(\mu + \beta)(\gamma + \mu + \eta)}, \frac{-\gamma}{\alpha} + \frac{\pi\beta\gamma}{\mu(\mu + \beta)(\gamma + \mu + \eta)} \right)$$

est localement asymptotiquement stable , si $R_0 > 1$.

Chapitre 5

Contrôle optimal de la dynamique de transmission du Mildiou de la pomme de terre

Dans cette section, nous introduisons le problème du contrôle optimal dans le modèle SEIR et étudions la solution du problème.

5.1 Problème du contrôle optimal

Ces résultats indiquent une stratégie pour réduire la transmission du mildiou de la pomme de terre .

Par conséquent, nous ajoutons le contrôle $u(t)$ qui dépend du temps t et qui représente le fongicide qui protège la plante susceptible de la maladie. Ce qui réduit la force d'infection associée par le facteur $(1-u(t))$.

Le contrôle $u(t) \in U_{ad}$ tel que U_{ad} est l'ensemble des contrôles admissibles qui est définie par :

$$U_{ad} = \{u / u(t) \text{ est mesurable, } 0 \leq u(t) \leq 1 \forall t \in [0, t_f]\}$$

Donc, le modèle de contrôle est formulé en combinant les variables de contrôle mentionnées précédemment à travers le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = \pi - \alpha(1 - u(t))S(t)I(t) - \mu u(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \alpha(1 - u(t))S(t)I(t) - (\beta + \mu)E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta E(t) - (\gamma + \mu + \eta)I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{array} \right. \quad (5.1)$$

La fonctionnelle d'objectif du modèle proposé pour minimiser l'infection est donnée comme-suit :

$$J(u) = \int_0^{t_f} [CI(t) + \frac{1}{2}\rho u^2(t)]dt$$

où C et ρ des constantes positives. ρ signifie la mesure du poids qui est associé au contrôle u qui permet de régulariser ce dernier. Le terme $CI(t)$ représente le gain pour la population des infectés.

De plus, le lagrangien du système décrivant le problème de contrôle optimale est donné par :

$$L = CI(t) + \frac{1}{2}\rho u^2(t)$$

Et la fonction hamiltonienne est définie comme-suit :

$$H = L + \lambda_1(t)\frac{dS(t)}{dt} + \lambda_2(t)\frac{dE(t)}{dt} + \lambda_3(t)\frac{dI(t)}{dt} + \lambda_4(t)\frac{dR(t)}{dt} .$$

5.2 existence du contrôle optimal

Maintenant, nous présentons un résultat qui vérifiera l'existence de contrôle optimal qui minimisent la fonctionnelle objective J dans un intervalle fini.

Proposition 5.2.1. *Considérons le problème de contrôle optimal associé au système (1) , alors il existe un contrôle optimal u dans U_{ad} tel que*

$$J(u^*) = \min \{J(u) : u \in U_{ad}\}$$

Preuve. Toutes les variables d'état impliquées dans le modèle sont continûment différentiables. Afin de démontrer la proposition, nous devons donc vérifier les quatre conditions suivantes énoncées.

- 1 L'ensemble des solutions du système (1) avec les variables de contrôle dans U_{ad} est non vide.

- 2 L'ensemble U_{ad} est convexe and fermé.
- 3 Le système d'état peut être exprimé sous forme de fonction linéaire des variables de contrôle, avec des coefficients dépendant du temps et des variables d'état.
- 4 Le lagrangien L de l'équation (.) est convexe par rapport à U_{ad} et $L(S, E, I, R, u) \geq g(u)$, avec g est continue et $|u|^{-1}g(u) \rightarrow +\infty$ as $|u|^{-1} \rightarrow \infty$

■

5.3 Caractérisation de contrôle optimale

Après avoir établi l'existence du contrôle optimal qui minimise la fonctionnelle objective J , nous caractériserons ce contrôle optimal en appliquant le principe du maximum de Pontryagin à l'hamiltonien.

Soient X la solution du système, $u \in U_{ad}$ et $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$. La fonction Hamiltonienne est définie par :

$$H(X, u, \lambda, t) = L(S, E, I, R, u) + \lambda_1 \frac{dS}{dt} + \lambda_2 \frac{dE}{dt} + \lambda_3 \frac{dI}{dt} + \lambda_4 \frac{dR}{dt}$$

Si $(X^*(t), u^*(t))$ est la solution optimal du problème du contrôle optimal, alors il existe une fonction adjointe $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ telle que :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{\partial H(X^*(t), u^*(t), \lambda(t), t)}{\partial \lambda} \\ 0 &= \frac{\partial H(X^*(t), u^*(t), \lambda(t), t)}{\partial u} \\ \frac{d\lambda(t)}{dt} &= - \frac{\partial H(X^*(t), u^*(t), \lambda(t), t)}{\partial X}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Étant donné un contrôle optimal $u^* \in U_{ad}$ et la solution correspondante $X = (S^*, E^*, I^*, R^*)$ qui minimisent $J(u)$ sur U_{ad} . Alors, il existe des variables adjointes $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, 4$ satisfaisant

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_1(t)}{dt} &= \lambda_1(t)[\alpha(1 - u(t)I(t) + \mu)] \\
\frac{d\lambda_2(t)}{dt} &= \lambda_2(t)[\beta + \mu] \\
\frac{d\lambda_3(t)}{dt} &= -C + \lambda_3(t)[\gamma + \mu + \eta] \\
\frac{d\lambda_4(t)}{dt} &= \mu\lambda_4(t)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

où les conditions de transversalité $\lambda_i(t_f) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. De plus

$$u^*(t) = \max\left\{ \min\left\{ 1, \frac{\alpha(\lambda_2(t) - \lambda_1(t))S^*(t)I^*(t)}{\rho} \right\} \right\}. \tag{5.4}$$

Preuve. Les équations adjointes (5.2) sont dérivées du principe du maximum de Pontryagin en prenant les dérivées partielles de l'hamiltonienne par rapport aux variables d'état correspondantes. Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_1}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial S} \\
\frac{d\lambda_2}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial E} \\
\frac{d\lambda_3}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial I} \\
\frac{d\lambda_4}{dt} &= \frac{-\partial H}{\partial R}
\end{aligned}$$

avec conditions finales de transversalité $\lambda_i(t_f) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. De plus, pour obtenir la caractérisation du contrôle optimale donnée par (5.4), nous résolvons l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

On utilise les conditions d'optimalité, alors

$$u^* = \begin{cases} 0 & \text{if } \nu^* < 0, \\ \nu^* & \text{if } 0 \leq \nu^* \leq 1, \\ 1 & \text{if } \nu^* > 1, \end{cases}$$

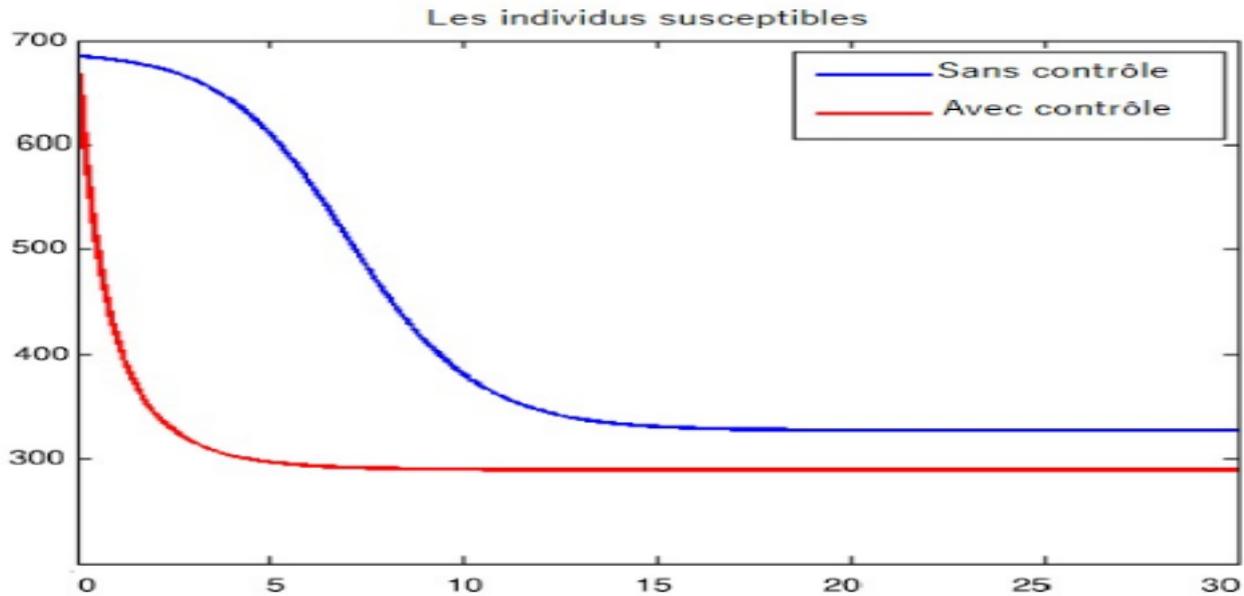
Avec

$$\nu^*(t) = \frac{\alpha (\lambda_2(t) - \lambda_1(t)) S^*(t) I^*(t)}{\rho}$$

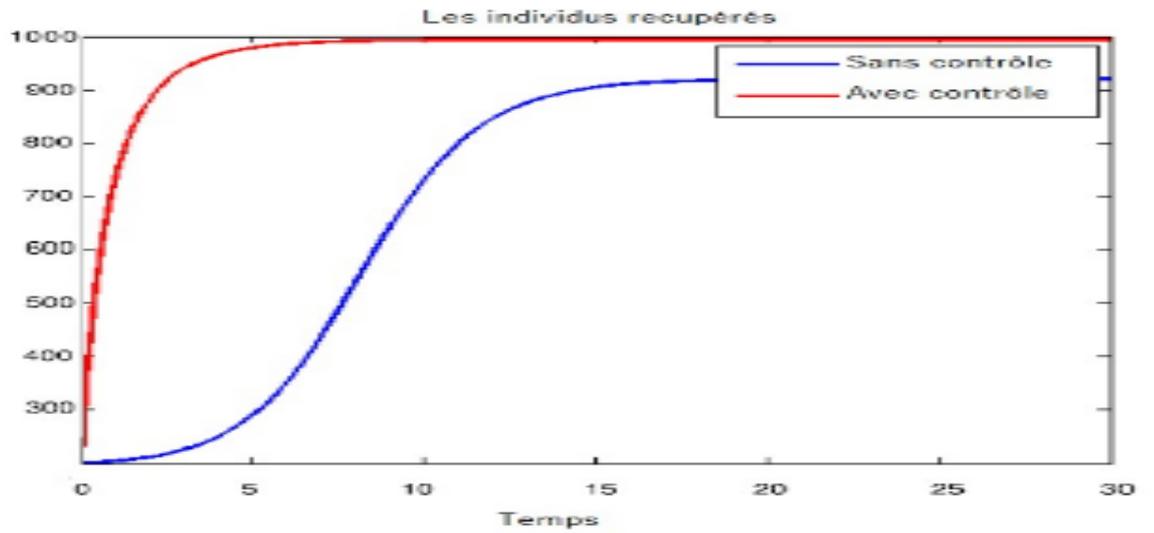
■

5.4 Simulation

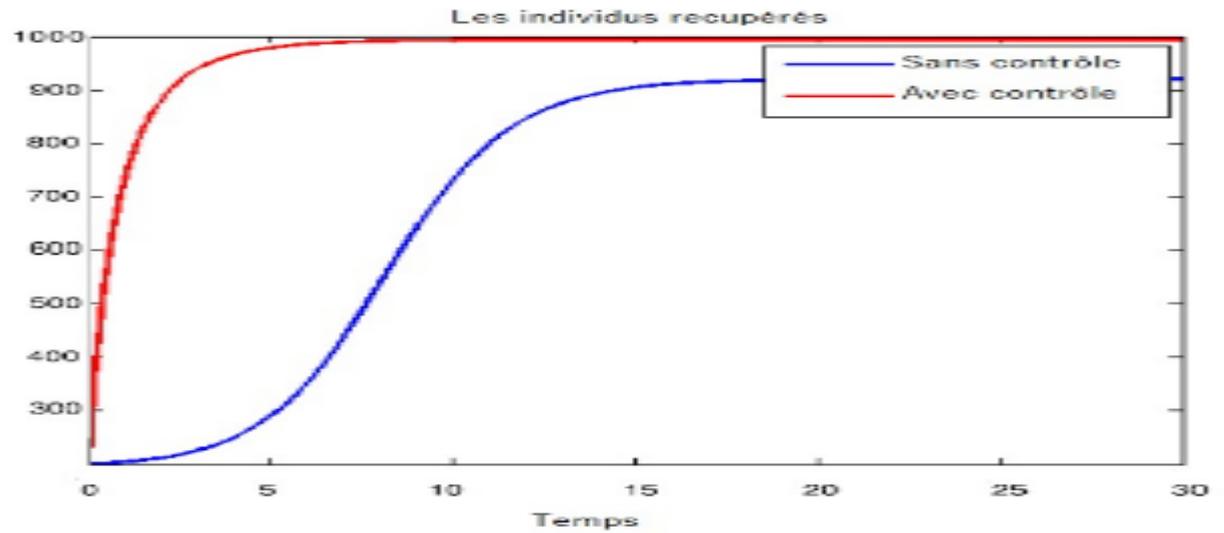
Cette section est consacrée à la réalisation des résultats de simulation de la transmission du mildiou de la pomme de terre avec et sans contrôle.



La figure montre que le nombre des individus susceptibles avec contrôle décroît ce qui montre le rôle du fongicide dans la protection des pommes de terre saines du mildiou.



La figure montre que le nombre des individus infectés avec contole décroît ce qui montre le role du fongicide à minimiser le nombre des infectés.



La figure montre que le nombre des individus rétablis avec contole croit ce qui montre le role du fongicide à maximiser le nombre des rétablis.

Chapitre 6

Conclusion

Ce mémoire est consacré à l'analyse d'un modèle mathématique de propagation du mildiou de la pomme de terre, qui est formulé selon le format SEIR. Théoriquement, il a été démontré que la dynamique de ce modèle dépend du nombre de reproduction de base, ce qui permet d'étudier la stabilité du système. En outre, une analyse du modèle mathématique du mildiou de la pomme de terre avec contrôle optimal est également réalisée.

Plus précisément, nous avons commencé par un chapitre préliminaire contenant des notions et des définitions de point d'équilibre, du nombre de reproduction de base ainsi que nous avons rappelé les résultats de stabilité des équations différentielles ordinaires et le critère de Routh-Hurwitz. Le deuxième chapitre a été dédié aux modèles à compartiments usuels (SI, SIS, SIR, SIRS, SEI, SEIR). Le chapitre trois a été divisé en trois sections principales, la première a été consacrée à une introduction sur la maladie du mildiou de la pomme de terre, la deuxième section sur les symptômes de cette maladie, la troisième section a été sur le cycle du développement du mildiou de la pomme de terre et la quatrième section a été réservée entièrement aux conséquences du mildiou sur la récolte et le traitement. L'analyse mathématique du modèle SEIR approprié pour simuler le mildiou a été présentée dans le chapitre 4. Le dernier chapitre a été consacré au contrôle optimal de la dynamique de transmission du mildiou ainsi qu'une simulation.

Bibliographie

- [1] BASF, *mildiou de la pomme de terre* www.agro.basf.fr
- [2] JARDINIER AUTREMENT, *mildiou de la pomme de terre* www.jardiner-autrement.fr
- [3] SYNGENTA FRANCE, *traitement du mildiou de la pomme de terre* www.syngenta.fr
- [4] MALADIE ET RAVAGEURS DE LA POMME DE TERRE, *developpement du mildiou de la pomme de terre* [W Radtke, W Rieckmann, M Magnenat - 1991 - Th. Mann](#)
- [5] IRIISPHYTOPROTECTION, *fiche technique du mildiou de la pomme de terre* www.iriisphytoprotection.qc.ca
- [6] EPHYTIA, *fiche technique du mildiou de la pomme de terre* www.ephytia.inra.fr
- [7] TARPIN-JARDIN, *lutte contre le mildiou de la pomme de terre* www.tarpin-jardin.com
- [8] OATAO, *modélisation du mildiou de la pomme de terre* <http://ethesis.inp-toulouse.fr/archive/00002160/>
- [9] CAHIER AGRICULTEURS, *l'époqué du mildiou de la pomme de terre* www.revues.cirad.fr
- [10] USAID, *mildiou de la pomme de terre* www.pdf.usaid.gov
- [11] UNIVERSITÉ LILLE, *modèle SIR* <http://nonlineaire.univ-lille1.fr/SNL/media/2021/presentations/Schmitt-RNL2021.pdf>
- [12] H. LEIPHOLZ, *Stability Theory, An Introduction to the Stability of Dynamical Systems and Rigid Bodies* [H Leipholz - 2013 - books.google.com](#)
- [13] DAVID R. MERKIN, (1997), *critère de routh hurwitz* [DR Merkin - Introduction to the theory of stability, 1997 - Springer](#)
- [14] UNIVERSITÉ LILLE, *modèle SIR* <http://nonlineaire.univ-lille1.fr/SNL/media/2021/presentations/Schmitt-RNL2021.pdf>
- [15] JOURNAL OF BIOLOGICAL DYNAMICS, *Optimal control strategies for the transmission risk of COVID-19* <https://doi.org/10.1080/17513758.2020.1788182>

- [16] CONTROL THE SPREAD OF COVID-19, *Optimal control Analysis*
<https://doi.org/10.1101/2020.06.08.20125393>