Université Hassan II Casablanca
Faculté des Sciences Ben M'sik
Département de Mathématiques et Informatique

FILIERE : SCIENCES MATHEMATIQUES & APPLICATIONS

MODULE : PROJET DE FIN D'ETUDES

COORDONNATEUR : Youssef EL FOUTAYENI

PROJET DE FIN D'ÉTUDE

Repère de Frenet d'une courbe régulière

Réalisé par : FATHI Inass

Présenté et soutenu devant le jury composé de :

Pr.	OUAZZANI Amina	-------------------	*Présidente*
Pr.	AHARMIM Bouchra	-------------------	*Examinatrice*
Pr.	IZID Malika	-------------------	*Encadrante*

2021 -2022

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à notre chère professeur et encadrante Mme IZID Malika pour le temps qu'elle a consacré et pour les précieuses informations qu'elle m'a prodiguées avec intérêt et compréhension, et également pour son suivi et pour son énorme soutien, qu'elle n'a cessé de nous donner tout au long de la période du projet.
Par la même volonté et la même chaleur, j'adresse mes vifs remerciements aux membres des jurys Pr. OUAZZANI Amina et Pr. AHARMIM Bouchra pour avoir bien voulu examiner et juger ce travail.
Je souhaite remercier aussi ma familles, mes proches et mes amis pour leur énorme soutien tout au long de mes années d'études.
Enfin, mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin au bon déroulement de ce travail.

Table des matières

Introduction

Ce travail est situé dans le domaine de la géométrie des courbes et des surfaces (géométrie différentielle classique). Dans cette branche de géométrie, on s'intéresse particulièrement à l'étude des propriétés locales des courbes d'un espace euclidien de dimension 3. Dans cet objectif, on a attaché aux courbes, en chacun de leurs points des trièdres de références, en particulier le trièdre de Serret-Frenet.

Dans ce travail on s'intéresse aux Repère de Frenet d'une courbe régulière. Il s'agit d'étudier le repère de Frenet et celui du Serret-Frenet dans le cas de dimension 3, les formules de Frenet ainsi que la courbure et la torsion.

Ce projet de fin d'étude est intitule « Repère de Frenet d'une courbe régulière » comporte trois chapitres :

- Chapitre 1 : Intitule « Arcs Géométriques ». Il est consacré aux rappels des arcs géométriques du point de vue affine comme du point de vue métrique.
- Chapitre 2 : nommé « Repère de Frenet d'une courbe régulière ». Il porte sur le trièdre de référence le plus connus en géométrie : Repère de Frenet.
- Chapitre 3 : portant sur les « Applications ». On présente quelques courbes spéciales comme l'hélice général et l'hélice oblique et on donne leurs propriétés caractéristiques, et pour illustrer les résultats du chapitre 2, on a étudié l'exemple de l'hélice circulaire et celui des courbes de précession constante.

1 Arcs Géométriques

Dans ce chapitre on donne un cadre a l'étude des courbes de $\mathbb{R}^n, (n \geq 2)$. Il s'agit d'abord de traduire rigoureusement l'idée que l'on se fait de cette notion-même de courbe, qui vient de la notion de trajectoire physique d'une particule dans le plan ou dans l'espace, ou encore, très naïvement, de la ligne que le crayon trace sur le papier. En géométrie, le mot courbe, ou ligne courbe, désigne certains sous-ensembles du plan, de l'espace usuel. Par exemple, les droites, les segments, les lignes polygonales et les cercles sont des courbes. La notion générale de courbe se décline en plusieurs objets mathématiques ayant des définitions assez proches : arcs paramétrés. Schématiquement, ces différents modes d'introduction donnent des éclairages complémentaires sur la notion générale de courbe : Une courbe peut être décrite par un point qui se meut suivant une loi déterminée. La donnée d'une valeur du paramètre temps permet alors de repérer un point sur la courbe.
Intuitivement, cela signifie que les courbes sont des objets de dimension 1. Une courbe peut être vue comme un domaine du plan ou de l'espace qui vérifie un nombre suffisant de conditions, lui conférant encore un caractère unidimensionnel. Ainsi une courbe plane peut être représentée dans un repère cartésien par la donnée de lois décrivant abscisse et ordonnée en fonction du paramètre (équation paramétrique).

1.1 Définitions et caractérisations

Définition 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

— On appelle arc paramétré de $\mathbb{R}^n$ ou courbe paramétré de $\mathbb{R}^n$, tout couple (I, f) où

$$\begin{cases} I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \\ f : I \to \mathbb{R}^n \text{ est une application continue} \end{cases}$$

— γ est dit de classe $C^k (k > 1)$ si f est de classe C^k

— On appelle support de γ, trajectoire de γ ou courbe paramétrée par f, le sous-ensemble $f(I)$ de $\mathbb{R}^n$.

Si la paramétrisation est suffisamment dérivable, on appelle aussi :

— **Point**, ou **position**, de la courbe γ à l'instant t le vecteur

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

.

— **Vitesse** de la courbe γ à l'instant t le vecteur

$$f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$$

— **Accélération** de la courbe γ à l'instant t le vecteur

$$f''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) \in \mathbb{R}^3$$

.

On rappelle qu'une fonction $\theta : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ est un difféomorphisme de classe C^k si

— θ est dérivable de classe C^k sur I.

— θ est inversible, c'est-à-dire qu'il admet la réciproque $\theta^{-1} : J \longrightarrow I$.

— la réciproque θ^{-1} est dérivable de classe C^k sur J.

En particulier, une fonction θ de classe C^1 est un difféomorphisme si et seulement si $\theta'(t) \neq 0$ pour tout t.

Définition 2. Deux chemins (I, f) et (J, g) de classe C^k(k≥1), sont dits C^k-équivalents, s'il existe un C^k-difféomorphisme

$$\theta : I \longrightarrow J$$

tel que

$$f = g \circ \theta$$

On dit que f se déduit de g par un changement de paramètre θ. Les variables de f et g sont alors dits paramètres.

Remarque 1. La relation « (I, f) et (J, g) sont C^k-équivalents » est une relation d'équivalence.

Définition 3. — Un **arc géométrique** de classe C^k est une classe d'équivalence γ de chemins C^k-équivalents.

— Les chemins de la classe γ sont appelés les **représentations paramétriques** de l'arc γ.

Remarque 2. Le support d'une courbe (I, f) coïncide avec celui d'un reparamétrage $f = g \circ \theta$, car un difféomorphisme θ est en particulier une bijection. Le contraire n'est pas vrai : si un même support admet deux paramétrisations, celles-ci ne sont pas forcement l'une un reparamétrage de l'autre.

1.1.1 Arcs Multiples. Arcs Simples

Dans $\mathbb{R}$, soit γ un arc géométrique et M un point de son support. Désignons par f une paramétrisation de γ. Les changements de paramètres étant bijectifs, le cardinal de l'ensemble $f^{-1}(M)$ est indépendant du choix de f, si ce cardinal est fini, l'entier $p = card(f^{-1})$ est appelé l'ordre de multiplicité du point M.

— Si $p = 1$, le point M est dit **simple**.

— Si $p \geq 2$, le point M est dit multiple d'ordre p (double si $p = 2$, triple si $p = 3$, etc)

Définition 4. Un arc γ est dit simple si tous les points de son support sont simples.

Remarque 3. Pour qu'un arc γ soit simple, il suffit que l'une de ses paramétrisations soit injective.

1.1.2 Arcs Orientés

L'application $\theta : I \longrightarrow J$ est un difféomorphisme de classe C^k $(k \geq 1)$ si et seulement si θ est bijective de classe C^k et ne s'annule pas sur I, il est donc strictement croissant ou strictement décroissant. S'il est croissant, il en est de même de θ^{-1}, si θ_1 et θ_2 sont croissants, alors $\theta_1 \circ \theta_2$ est aussi croissant. On obtient alors une relation d'équivalence plus fine en posant la définition

Définition 5. Deux chemins (I, f) et (J, g) de classe C^k, sont dits positivement C^k-équivalents, s'il existe un C^k-difféomorphisme

$$\theta : I \longrightarrow J \text{ croissant}$$

tel que

$$f = g \circ \theta$$

. Les classes d'équivalences définies par cette relation d'équivalence sont dites arcs orientés de classe C^k

Cette relation admet exactement deux classes : si g un paramétrage admissible de γ, ces deux classes sont :

$$\gamma^+ = \{g \circ \theta \setminus \theta \text{ est croissant }\} \text{ et } \gamma^- = \{g \circ \theta \setminus \theta \text{ est décroissant }\}$$

On notera que γ^+ et γ^- ne sont pas nécessairement distinctes. Autrement dit, si g est une autre paramétrisation de γ, il se peut qu'il existe θ_1 croissant et θ_2 décroissant tels que

$$g = f \circ \theta_1 \text{ et } g = f \circ \theta_2.$$

On dit alors que l'arc γ possède une seule orientation. Pour connaître un tel arc, on utilise le lemme suivant :

Lemme 1. *Un arc géométrique γ définie par une paramétrisation*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

admet une seule orientation si et seulement si il existe un changement de paramètre décroissant

$$\theta : I \longrightarrow I$$

vérifiant

$$f = f \circ \theta$$

Proposition 6. Pour qu'un arc géométrique admette deux orientations, il suffit qu'il possède deux points simples.

Démonstration. Soient γ un arc géométrique et (I, f) une représentation de γ
Soient $M_1 = f(t_1)$ et $M_2 = f(t_2)$ deux points simple de γ avec $t_1 < t_2$.
Supposons que γ possède une seule orientation.
D'après le lemme précédent

$$\exists \theta : I \longrightarrow I \text{ décroissant tel que } f = f \circ \theta$$

On a

$$M_1 = f(t_1) = (f \circ \theta)(t_1) = f(\theta(t_1)) \text{ or } M_1 \text{ est simple, } t_1 = \theta(t_1)$$

Et

$$M_2 = f(t_2) = f(\theta(t_2)), \text{ or } M_2 \text{ est simple, } t_2 = \theta(t_2)$$

Or

$$M_1 \neq M_2 \Longrightarrow t_1 \neq t_2$$

On a $t_1 < t_2$ alors $\theta(t_1) = t_1 > \theta(t_2) = t_2$ (car θ est décroissant)
Ce qui est absurde. □

Corollaire 7. Un arc simple admet deux orientations.

1.1.3 Sous-Arcs. Arcs Réguliers

Définition 8. Soit γ un arc géométrique de classe C^k, défini par une paramétrisation $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Tout arc défini par la restriction de f à un sous intervalle de I est appelé **sous-arc** de γ.

Points réguliers. Points stationnaires

Considérons (I, f) et (J, g) deux paramétrisation de classe C^k,$(k \geq 1)$ d'un même arc γ, telles que $f = g \circ \theta$, où θ un changement de paramètre.
Pour tout $t \in I$, On a

$$\theta'(t) \neq 0 \text{ et } f'(t) = g'(\theta(t)).\theta'(t)$$

Alors

$$\forall t \in I, \; f'(t) \neq 0 \Longleftrightarrow \forall u \in J, \; g'(u) \neq 0$$

Si pour t=t_0, on a $f'(t_0) = 0$, on a aussi $g'(u_0) = 0$ (avec $\theta(t_0) = u_0$), on peut donc poser la définition

Définition 9. Soit γ un arc géométrique de classe C^k définie par une paramétrisation

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (f_1(t), \ldots, f_n(t)) \end{aligned}$$

On dit que

- γ est **régulier** en $t_0 \in I$ si $f'(t_0) \neq 0$ (i.e. si et seulement si $|f'(t_0)| \neq 0$) ;
- γ est **singulier** en $t_0 \in I$ si $f'(t_0) = 0$ (i.e. si et seulement si $|f'(t_0)| = 0$) ;
- γ est **régulier** si il est régulier en tout point $t \in I$.

Théorème 10. *Tout arc régulier admet deux orientations distinctes.*

1.2 Propriétés métriques des arcs

1.2.1 Longueur et abscisse curviligne

Soit (I, f) une courbe régulière, et supposons que I soit un intervalle fermé ou ouvert d'extrêmes a et b, i.e $I = [a, b]$ ou $I =]a, b[$.

Définition 11. On appelle **longueur de l'arc** γ, le nombre

$$\mathbf{L}(\gamma) = \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

Théorème 12. *La longueur d'un arc est un invariant géométrique ; c'est à dire elle ne dépend pas de la paramétrisation choisie.*

Proposition 13. Soit γ un arc géométrique défini par $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\epsilon \in [a,b]$. Soit γ_1 (resp. γ_2) le sous-arc de γ défini par la restriction de f à $[a,c]$ (resp. $[c,d]$). Alors

$$\mathbf{L}(\gamma) = \mathbf{L}(\gamma_1) + \mathbf{L}(\gamma_2)$$

Soient γ un arc géométrique régulier représenté par (I,f) et $t_0 \in I$.

Définition 14. On appelle **abscisse curviligne** de la courbe (I,f) d'origine t_0, la quantité :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\| du$$

Paramétrisation normale

Définition 15. Une paramétrisation $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ d'une courbe γ est normal si

$$\forall t \in I, \|f'(t)\| = 1$$

Remarque 4. Une paramétrisation normale est simplement un paramétrage pour lequel on parcourt la courbe à vitesse constante égale à 1.

Proposition 16. Si un arc possède une paramétrisation normale, alors il est régulier.

Remarque 5. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une paramétrisation de l'arc régulier γ de classe $C^k (k \geq 1)$. On fixe un point $t_0 \in I$ et on pose, pour tout t dans I,

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\| du$$

La fonction s est un difféomorphisme de classe C^1 de I à valeurs dans $J = s(I)$, appelée abscisse curviligne.

L'application

$$g = f \circ s^{-1} : s(I) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

est une autre paramétrisation de la courbe γ vérifiant

$$\|g'(s)\| = 1, \ \forall s \in J$$

Proposition 17. Si (I, f) est une paramétrisation normale d'un arc γ, alors toute autre paramétrisation normale est de la forme

$$t \longrightarrow f(t+a) \text{ ou } t \longrightarrow f(-t+a)$$

avec a réel quelconque.

1.2.2 Tangente. Normale principale. Courbure

Soit γ un arc régulier orienté de classe $C^k (k \geq 2)$ défini par une paramétrisation normale (J, g)
Soit (I, f) une autre paramétrisation normale de γ et

$$\begin{aligned} s : I &\longrightarrow J \\ t &\longmapsto s(t) \end{aligned}$$

un changement de paramètre tel que

$$f(t) = (g \circ s)(t).$$

On a

$$f'(t) = g'(s(t))s'(t),$$

et comme $\|f'(t)\| = \|g'(s)\| = 1, \forall t \in I$ et $\forall s \in J$, on a nécessairement

$$\begin{aligned} &s'(t) = 1 \text{ si } f \text{ conserve l'orientation de } \gamma \\ &s'(t) = -1 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &f'(t) = g'(s) \text{ si } f \text{ conserve l'orientation de } \gamma \\ &f'(t) = -g'(s) \text{ sinon.} \end{aligned}$$

D'autre part, en dérivant une deuxième fois $f(t)$, on obtient

$$f''(t) = g''(s) \left(s'(t)\right)^2 + g'(s)s''(t)$$

D'après ce qui précède, on en déduit que

$$f''(t) = g''(s), \text{ au point } M = f(t) = g(s),$$

ce qui justifie les définitions suivantes :

Définition 18. On appelle **vecteur tangent unitaire** en un point $M = g(s)$ de l'arc γ, le vecteur

$$\overrightarrow{T} = g'(s)$$

Remarque 6. Si $M = g(s)$ est un point de l'arc régulier orienté γ, le vecteur tangent $\overrightarrow{T}(s)$ ne dépend que du point M et non de la paramétrisation normale choisie. Si on change l'orientation de γ, le vecteur change en son opposé.

Définition 19. La fonction numérique définie sur J par

$$s \longmapsto \rho(s) = \|g''(s)\|$$

est appelée **la fonction courbure** de γ (ou courbure de γ au point $M = g(s)$).

Remarque 7.
- Si $M = g(s)$ est un point de l'arc régulier orienté γ, le nombre $\rho(s)$ associé ne dépend pas de la paramétrisation normale choisie.
- La courbure en un point régulier $M = g(s)$ est nulle si et seulement si M est un point d'inflexion ($M = g(s)$ est un point d'inflexion si les vecteurs $g'(s)$ et $g''(s)$ sont colinéaires).

Définition 20. Supposons que l'arc γ ne possède pas de points d'inflexion.
La fonction définie sur J par

$$\overrightarrow{N} : s \longrightarrow \overrightarrow{N}(s) = \frac{g''(s)}{\|g''(s)\|} = \frac{g''(s)}{\rho(s)}$$

est appelé **fonction normale principale** à γ.
La droite passant par le point $M = g(s)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{N}(s)$ est appelée la normale principale à γ en M.

Le nombre

$$\mathbf{R}(s) = \frac{1}{\rho(s)}$$

est appelé **le rayon de courbure** de γ en $M = g(s)$
Le point I définie par

$$\overrightarrow{\mathrm{MI}} = \mathbf{R}(s)\overrightarrow{N}(s)$$

est appelé **le centre de courbure** de γ en M.

Remarque 8. Si l'arc γ est régulier et ne possède pas de points d'inflexion :

1. le point I et le vecteur $\overrightarrow{N}(s)$ sont indépendants de l'orientation de γ.
2. On a $\|g'(s)\|^2 = 1$, ceci implique par dérivation

$$g'(s).g''(s) = 0$$

d'où

$$\overrightarrow{T}(s).\overrightarrow{N}(s) = 0$$

3. Le vecteur $\overrightarrow{N}$ est dirigé vers la concavité de la courbe.

Cas d'une paramétrisation quelconque

Comme l'abscisse curviligne n'est pas souvent calculable, il est utile d'exprimer la courbure en fonction d'une paramétrisation quelconque
Soient (I, f) une paramétrisation quelconque d'un arc régulier orienté γ et sans points d'inflexion, (J, g) une paramétrisation normale de γ, et s un reparamétrage vérifiant

$$f(t) = (g \circ s)(t)$$

D'où

$$f'(t) = g'(s)s'(t) = \overrightarrow{T} s'(t)$$

et

$$\|f'(t)\| = s'(t)$$

On déduit l'expression du vecteur unitaire tangent

$$\overrightarrow{T}(s) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

D'autre part

$$f''(t) = g'(s)s''(t) + g''(s)s'(t)^2$$

On obtient l'écriture

$$f''(t) = s''(t)\overrightarrow{T}(s) + s'(t)^2\rho(s)\vec{\rho}(s)$$

On remarquera que le vecteur $f''(t)$ est contenu dans le demi plan limité par la tangente au point $M = f(t)$ et le vecteur $\overrightarrow{N}(s)$. On dit que le vecteur accélération $f''(t)$ est dans la concavité de la courbe.
Des deux relations :

$$f'(t) = s'(t)\overrightarrow{T}(s) \text{ et } f''(t) = s''(t)\overrightarrow{T}(s) + s'(t)^2\rho(s)\vec{\rho}(s)$$

On déduit que

$$\rho(s) = \frac{det(f'(t), f''(t))}{\|f'(t)\|^3} \text{ si } n = 2, \text{ et } \rho(s) = \frac{\|f'(t) \wedge f''(t)}{\|f'(t)\|^3} \text{ si } n = 3.$$

Proposition 21. Les seules courbes dont la courbure est constante sont les (portions de) droites et les cercles.

Démonstration. Soit $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe géométrique de courbure constante. On peut paramétré γ par sa longueur d'arc $s :\longmapsto g(s)$.

Si la courbure est nulle, il vient $g'' = 0$, il s'agit d'une (portion de) droite.

Supposons ρ est une constante non nulle. Soit $T(s) = g'(s)$ le vecteur tangent et $N(s) = \frac{T'(s)}{\rho}$ le vecteur normal. Observons que

$$N'(s) = -\rho T(s)$$

En effet N est unitaire donc N' est orthogonal à N, donc proportionnel à T.

La constante de proportionnalité s'obtient en dérivant la relation d'orthogonalité

$$0 = \frac{d}{ds}\langle T, N\rangle = \langle T', N\rangle + \langle T, N'\rangle$$

D'où $\langle T, N'\rangle = -\rho$.

Soit $M(s) = g(s) + \frac{1}{\rho}N(s)$ le "centre de courbure" de γ au point $g(s)$. Le calcul précédent montre que $M(s) = M_0$ est constant, puisque

$$M'(s) = T(s) + \frac{1}{\rho}N'(s) = 0.$$

Il s'ensuit que γ est une portion du cercle de centre M_0 et de rayon $\frac{1}{|\rho|}$.

En effet

$$\|M_0 - g(s)\| = \frac{1}{|\rho|}\|N(s)\| = \frac{1}{|\rho|}$$

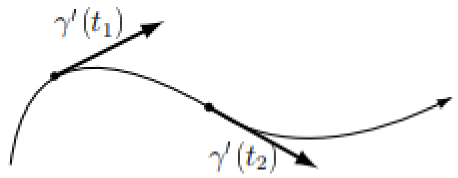
puisque $N(s)$ est unitaire. $\square$

2 Repère de Frenet d'une courbe régulière

Le repère de Frenet est un outil d'étude du comportement local des courbes. Plus exactement, il s'agit d'un repère local associé à un point décrivant une courbe. Son mode de construction est différent selon si l'espace ambiant est de dimension 2 (courbe plane) ou 3 (courbe gauche).
Le repère de Frenet, et les formules de Frenet (donnant les dérivées des vecteurs de ce repère), permettent de mener de façon systématique des calculs de courbure, de torsion pour les courbes gauches et d'introduire des concepts géométriques intéressants associés aux courbes.

2.1 Repère de Frenet. Courbure

Les caractéristiques d'une courbe s'évaluent en suivant la variation d'un repère "mobile" intrinsèque (s'il existe) le long de la courbe. Par exemple, si le vecteur vitesse ne change jamais de direction, la courbe est clairement une droite.



Lemme 2. *Soit $V : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un vecteur de l'espace dépendant d'un paramètre $t \in I$. Si V est constant en norme (non nulle). i.e. $\|V(t)\| = cte \neq 0$ pour tout $t \in I$, alors le produit scalaire de $V(t)$ avec sa dérivée $V'(t)$ est toujours nul : $\langle V(t), V'(t)\rangle = 0$ pour tout $t \in I$. Cela signifie que $V'(t)$ est orthogonal à $V(t)$ pour tout $t \in I$.*

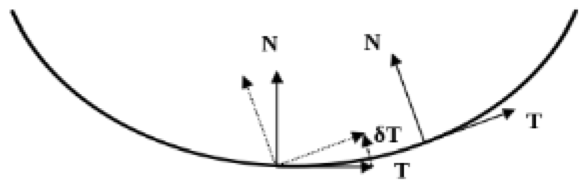
Soit γ un arc orienté régulier de $\mathbb{R}^2$ possédant une paramétrisation normale

$$\begin{aligned} g : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto g(s). \end{aligned}$$

Définition 22. Soit $s \in I$ et $M = g(s)$. on note par $\overrightarrow{N}(s)$ le vecteur normal unitaire orthogonal à $\overrightarrow{T}(s)$ tel que $(\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s))$ ait l'orientation choisie de $\mathbb{R}^2$.
Le repère

$$(M, \overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s))$$

est appelé **le repère de Frenet**.



Remarque 9.

1. Un changement d'orientation de γ change $\overrightarrow{T}(s)$ et $\overrightarrow{N}(s)$ en leurs opposés.
2. Un changement d'orientation de $\mathbb{R}^2$ ne change pas $\overrightarrow{T}(s)$, mais change $\overrightarrow{N}(s)$ en $-\overrightarrow{N}(s)$.

.

2.1.1 Courbure algébrique. Formules de Frenet

On suppose que γ est de classe C^2

• On a

$$\|\overrightarrow{T}^2\| = \overrightarrow{T}.\overrightarrow{T} = 1$$

Donc

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}.\overrightarrow{T} = 0$$

Alors il existe donc une fonction scalaire

$$\rho : s \longmapsto \rho(s)$$

telle que

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \rho(s)\overrightarrow{N}(s).$$

La fonction ρ est dite **fonction courbure algébrique**. Le nombre $\rho(s)$ est appelé **courbure algébrique** de l'arc γ au point $M = g(s)$

• De même on a

$$\frac{d\overrightarrow{N}}{ds}.\overrightarrow{N}(s) = 0$$

Alors il existe une fonction scalaire α telle que

$$\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \alpha(s)\overrightarrow{T}(s)$$

mais

$$\overrightarrow{T}(s).\overrightarrow{N}(s) = 0$$

La dérivation donne alors :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}.\overrightarrow{N}(s) + \overrightarrow{T}(s).\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = 0$$

c'est-à-dire

$$\rho(s) + \alpha(s) = 0$$

Donc

$$\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\rho_(s)\overrightarrow{T}(s)$$

Les **formules de Frenet** sont :

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} & = \rho(s)\overrightarrow{N}(s) \\ \\ \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} & = -\rho(s)\overrightarrow{T}(s) \end{cases}$$

• Le nombre

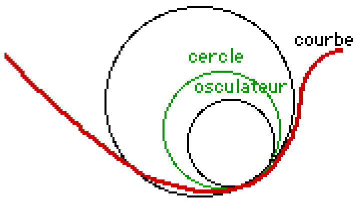
$$\mathbf{R}(s) = \frac{1}{\rho(s)}$$

est appelé **rayon de courbure algébrique** de l'arc γ au point $M = g(s)$

• Le **centre de courbure** de γ au point M est le point C défini par :

$$\overrightarrow{MC} = \mathbf{R}(s)\overrightarrow{N}(s)$$

• **Le cercle de courbure, ou cercle osculateur** est le cercle de centre C et de rayon $|\mathbf{R}|$



2.2 Repère de Serret-Frenet et torsion

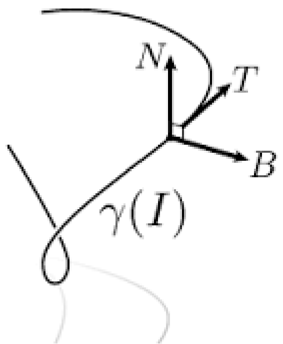
Repère de Serret-Frenet

Soit γ un arc régulier orienté de classe $C^k (k \geq 3)$, sans points d'inflexion, défini par une paramétrisation normale (I, g). On définit les trois vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T}(s) &= g'(s) \\ \overrightarrow{N}(s) &= \frac{g''(s)}{\|g''(s)\|} \\ \overrightarrow{B}(s) &= \overrightarrow{T}(s) \wedge \overrightarrow{N}(s) \end{aligned}$$

Alors

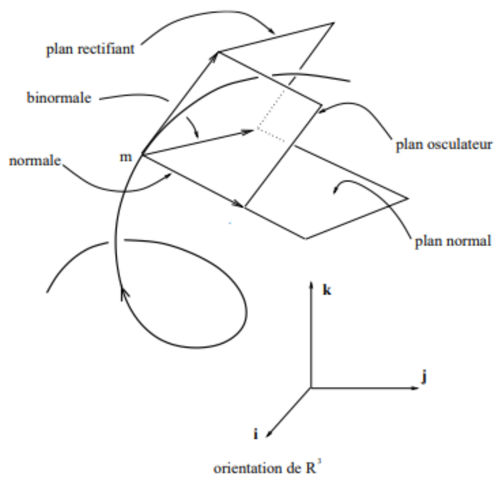
Définition 23. Le repère $(M, \overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s), \overrightarrow{B}(s))$ est appelé **le repère de Serret-Frenet**



— Le couple (T, N) engendre un plan appelé **plan osculateur** à la courbe. Ce plan contient la tangente et le cercle osculateur à la courbe.

— **Le plan rectifiant** engendré par le couple (T, B) et normal au rayon de courbure.

— **Le plan normal**, engendré par le couple (N, B) et normal à la tangente.



Remarque 10. — Le vecteur $\overrightarrow{B}(s)$ ne dépend que du point $M = g(s)$ et non de la paramétrisation normale choisie.

— Notons qu'un changement d'orientation de γ, change le repère $(M, \overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s), \overrightarrow{B}(s))$ en $(M, -\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s), \overrightarrow{-B}(s))$.

2.2.1 Torsion. Formules de Frenet

Cherchons à exprimer le vecteur $\frac{d\overrightarrow{B}}{ds}$ dans le repère $(M, \overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s), \overrightarrow{B}(s))$. En dérivant la relation $\|\overrightarrow{B}(s)\|^2 = 1$, on obtient

$$\overrightarrow{B}(s).\frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = 0$$

En dérivant la relation $\overrightarrow{B}(s) \cdot \overrightarrow{T}(s) = 0$ on a

$$\overrightarrow{B}(s) \cdot \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} + \overrightarrow{T}(s) \cdot \frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = 0,$$

d'où

$$\underbrace{\overrightarrow{B}(s) \cdot \rho(s)\overrightarrow{N}(s)}_{0} + \overrightarrow{T}(s) \cdot \frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = 0.$$

On obtient

$$\overrightarrow{T}(s) \cdot \frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = 0$$

On déduit que $\frac{d\overrightarrow{B}}{ds}$ et $\overrightarrow{N}(s)$ sont colinéaires, et par suite, il existe une fonction scalaire

$$\tau : s \longmapsto \tau(s)$$

appelée **la fonction torsion** de l'arc γ, vérifiant

$$\frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = \tau(s)\overrightarrow{N}(s)$$

Si $M = g(s)$ est un point simple de γ, le nombre $\tau(s)$ est appelé la torsion de γ au point M. Notons que la torsion ne change pas si on change l'orientation de γ.

Formules de Frenet

On cherche à exprimer les dérivées des vecteurs $\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s)$ et $\overrightarrow{B}(s)$ dans le repère de Frenet. On a déjà les deux formules :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \rho(s)\overrightarrow{N}(s)$$

$$\frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = \tau(s)\overrightarrow{N}(s).$$

Reste à calculer $\frac{d\overrightarrow{N}}{ds}$.

En dérivant $\|\overrightarrow{N}(s)\|^2 = 1$, on obtient :

$$\overrightarrow{N}(s) \cdot \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = 0,$$

Et en dérivant $\overrightarrow{T}(s) \cdot \overrightarrow{N}(s) = 0$, il vient

$$\tfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} \cdot \overrightarrow{N}(s) + d\overrightarrow{T}(s) \cdot \tfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} = 0.$$

$$\rho(s) \underbrace{\overrightarrow{N}(s) \cdot \overrightarrow{N}(s)}_{1} + \overrightarrow{T}(s) \cdot \tfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} = 0.$$

D'où

$$\overrightarrow{T}(s) \cdot \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\rho(s)$$

De même en dérivant $\overrightarrow{B}(s).\overrightarrow{N}(s) = 0$, on obtient

$$\tfrac{d\overrightarrow{B}}{ds} \cdot \overrightarrow{N}(s) + \overrightarrow{B}(s) \cdot \tfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} = 0.$$

$$\tau(s) \underbrace{\overrightarrow{N}(s) \cdot \overrightarrow{N}(s)}_{1} + \overrightarrow{B}(s) \cdot \tfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} = 0.$$

D'où

$$\overrightarrow{B}(s) \cdot \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\tau(s)$$

Ainsi

$$\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\rho(s)\overrightarrow{T}(s) - \tau(s)\overrightarrow{B}(s)$$

En regroupement les valeurs des dérivées des fonctions $\overrightarrow{T}(s)$, $\overrightarrow{N}(s)$ et $\overrightarrow{B}(s)$

Les **formules de Frenet**

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{N} \\ \overrightarrow{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 \\ -\rho & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{N} \\ \overrightarrow{B} \end{pmatrix}$$

En posant

$$\mathbf{R}(s) \quad = \tfrac{1}{\rho(s)} \text{ rayon de courbure}$$

$$\mathbf{R}'(s) \quad = \tfrac{1}{\tau(s)} \text{ rayon de torsion}$$

Les formules de Frenet s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{\overrightarrow{N}}{\mathbf{R}} \\ \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\frac{\overrightarrow{T}}{\mathbf{R}} - \frac{\overrightarrow{B}}{\mathbf{R}'} \\ \frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = \frac{\overrightarrow{N}}{\mathbf{R}'} \end{cases}$$

Cas où la torsion est nulle

Désignons toujours par γ, un arc régulier orienté de classe $C^k (k \geq 3)$. sans point d'inflexion, défini par une paramétrisation normale

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$s \longmapsto M = g(s).$$

On a :

$$g'(s) = \overrightarrow{T}(s).$$
$$g''(s) = \rho(s)\overrightarrow{N}(s),$$
$$\text{d'où } g'''(s) = -\rho^2(s)\overrightarrow{T}(s) + \rho'(s)\overrightarrow{N}(s) - \rho(s)\tau(s)\overrightarrow{B}(s).$$

On a $\tau(s) = 0$ si et seulement si $g'''(s)$ appartient au plan engendré par $\overrightarrow{T}(s)$ et $\overrightarrow{N}(s)$, autrement dit, les vecteurs g', g'' et g''' sont colinéaires. D'où le théorème :

Théorème 24. *Soit γ un arc régulier orienté de classe $C^k (k \geq 3)$, sans point d'inflexion. Pour que le support de γ soit contenu dans un plan, il faut et il suffit que la fonction torsion de γ soit nulle.*

Démonstration. Soit P un plan fixe et $\{i, j\}$ une base de telle que $P = \text{vect}\{i, j\}$

Soit $s_0 \in J$

$$\overrightarrow{g(s_0)g(s)} = \alpha(s)\vec{i} + \beta(s)\vec{j}$$
$$g'(s) = \alpha'(s)\vec{i} + \beta'(s)\vec{j}$$
$$= \overrightarrow{T}(s)$$

Donc $\overrightarrow{T}(s) \in P$

Et

$$g''(s) = \alpha''(s)\vec{i} + \beta''(s)\vec{j}$$
$$= \rho(s)\overrightarrow{N}(s)$$

Alors $\overrightarrow{N} \in P$

Donc $\forall s \in J$ on a $\{\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s)\}$ libre et par suite $P = vect\{\vec{i}, \vec{j}\} = vect\{\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s)\}$

Or

$$\overrightarrow{B}(s) \perp \overrightarrow{T}(s) \text{ et } \overrightarrow{B}(s) \perp \overrightarrow{N}(s)$$

Alors

$$\overrightarrow{B}(s) \perp P$$

Donc $\overrightarrow{B}(s) = B = C^{te}$

Alors

$$\frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = \tau(s)\overrightarrow{N}(s) = 0$$

Ainsi

$$\tau(s) = 0, \, \forall s$$

Réciproquement, on suppose $\tau(s) = 0, \, \forall s$

On a

$$(\overrightarrow{g(s_0)g(s)}.\overrightarrow{B}(s))' = g'(s)\overrightarrow{B}(s) + \overrightarrow{g(s_0)g(s)}\frac{d\overrightarrow{B}}{ds}$$

Or

$$g'(s)\overrightarrow{B}(s) = \overrightarrow{T}(s)\overrightarrow{B}(s) = 0$$

et puisque

$$\tau(s) = 0 \text{ alors } \frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = 0$$

Donc

$$\overrightarrow{g(s_0)g(s)}\overrightarrow{B}(s) = C^{te}, \, \forall s$$

En particulier pour $s = s_0$

$$\overrightarrow{g(s_0)g(s)}\overrightarrow{B}(s) = 0 \text{ d'où } C^{te} = 0$$

Donc

$$\overrightarrow{g(s_0)g(s)} \perp \overrightarrow{B}(s), \, \forall s$$

Ce qui implique $\overrightarrow{g(s_0)g(s)} \in P$ plan constant, perpendiculaire à $\overrightarrow{B}$ □

Remarque 11. Lorsque la courbure s'annule quelque part, il se peut que la torsion soit identique à zéro là où elle est définie sans que la courbe soit plane.

Position locale de la courbe par rapport à son trièdre de Frenet Soit γ un arc régulier orienté de classe $C^k (k \geq 3)$, sans point d'inflexion, défini par une paramétrisation normale

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$s \longmapsto M = g(s).$$

Les calculs précédents permettent d'écrire la Formule de Taylor à l'ordre 3 de la fonction g :

$$\begin{aligned} g(t) =& g(s) + (t-s)g'(s) + \frac{(t-s)^2}{2!}g''(s) + \frac{(t-s)^3}{3!}g'''(s) + o\left((t-s)^3\right) \\ =& g(s) + (t-s)\overrightarrow{T}(s) + \frac{(t-s)^2}{2!}\rho(s)\overrightarrow{N}(s) \\ &+ \frac{(t-s)^3}{3!}\left(-\rho^2(s)\overrightarrow{T}(s) + \rho'(s)\overrightarrow{N}(s) - \rho(s)\tau(s)\overrightarrow{B}(s)\right) + o\left((t-s)^3\right) \end{aligned}$$

où $(\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s), \overrightarrow{B}(s))$ est le repère de Frenet an point $g(s)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{g(s)g(t)} =& (t-s)(1+\cdots)\overrightarrow{T}(s) \\ &+ \frac{(t-s)^2}{2!}(\rho(s)+\cdots)\overrightarrow{N}(s) \\ &+ \frac{(t-s)^3}{3!}(-\rho(s)\tau(s)+\cdots)\overrightarrow{B}(s) \end{aligned}$$

d'où les allures de projections de l'arc γ sur les trois plans du trièdre.

Calcul de la courbure et de la torsion

Soit γ un arc régulier orienté de $\mathbb{R}^3$ de classe $C^k (k \geq 3)$. Si γ est défini par une paramétrisation normale g, les formules de Frenet permettent facilement le calcul des fonctions courbure et torsion.

On a

$$-\rho^2(s)\tau(s) = \det\left(g'(s), g''(s), g'''(s)\right).$$

Si γ est défini par une paramétrisation quelconque f. d'après ce qui précède, il existe g une paramétrisation normale et s un changement de paramètre vérifiant

$$f(t) = (g \circ s)(t)$$

D'après un calcul précédent

$$\rho(s) = \frac{\|f'(t) \wedge f''(t)\|}{\|f'(t)\|^3}$$

En posant $s(t) = s$, on a :

$$\begin{aligned} f'(t) &= g'(s)s'(t) \\ f''(t) &= g''(s)\left(s'(t)\right)^2 + g'(s)s''(t) \\ f'''(t) &= g'''(s)\left(s'(t)\right)^3 + g''(s)P(t) + g'(s)Q(t). \end{aligned}$$

On remarquera que, pour calculer la torsion, le calcul des fonctions scalaires P et Q est inutile.

On a

$$\det\left(f'(t) + f''(t), f'''(t)\right) = \left(s'(t)\right)^6 \det\left(g'(s), g''(s), g'''(s)\right)$$

avec $s'(t) = \|f'(t)\|$, d'où

$$\tau(s) = -\frac{\det\left(f'(t) + f''(t), f'''(t)\right)}{\|f'(t) \wedge f''(t)\|^2}$$

Calcul de $\overrightarrow{N}(s)$ et $\overrightarrow{B}(s)$

Soit γ un arc régulier orienté de $\mathbb{R}^3$ de classe $C^k (k \geq 3)$ défini par une paramétrisation normale g et f une paramétrisation quelconque de γ telle que :

$$f(t) = (g \circ s)(t).$$

D'où

$$\begin{cases} f'(t) = g'(s)s'(t) \\ f''(t) = g''(s)\left(s'(t)\right)^2 + g'(s)s''(t), \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f'(t) = s'(t)\overrightarrow{T}(s) \\ f''(t) = \rho(s)\left(s'(t)\right)^2 \overrightarrow{N}(s) + s''(t)\overrightarrow{T}(s), \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f'(t) \wedge f''(t) = \rho(s)\left(s'(t)\right)^3 \overrightarrow{T}(s) \wedge \overrightarrow{N}(s)$$

avec

$$\rho(s) = \frac{\|f'(t) \wedge f''(t)\|}{\|f'(t)\|^3} \text{ et } s'(t) = \|f'(t)\|.$$

On en déduit que

$$\overrightarrow{B}(s) = \overrightarrow{T}(s) \wedge \overrightarrow{N}(s) = \frac{f'(t) \wedge f''(t)}{\|f'(t) \wedge f''(t)\|}$$

et

$$\overrightarrow{N}(s) = \overrightarrow{B}(s) \wedge \overrightarrow{T}(s).$$

3 Applications. Les Hélices

3.1 Hélice générale

Définition 25. Une courbe $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $C^k(k \geq 2)$ est dite hélice général si le vecteur tangent fait un angle constant avec une direction fixe.

Autrement dit, si on désigne par θ l'angle que le vecteur tangent T fait avec la direction fixe u, on a

$$\langle T(s), u \rangle = \cos\theta \quad \forall s \in I.$$

Cette direction fixe u est appelée l'axe de l'hélice.

Proposition 26. Propriétés caractéristiques de l'hélice générale
Soit f une courbe régulière de classe $C^k(k \geq 3)$, sans point d'inflexion et de torsion non nulle. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

— Les tangentes à f font un angle constant avec une direction fixe.

— Les normales principales à f sont parallèles à un plan fixe.

— Les binormales à f font un angle constant avec une direction fixe.

— La fonction $\frac{\tau}{\rho}$ est constante.

Remarque 12. Dans le cas particulier où ρ et τ sont des constantes, l'hélice générale est dite hélice circulaire.

Exemple 27. Hélice circulaire L'hélice circulaire de $\mathbb{R}^3$ est la courbe paramétrée

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto (a\cos t, a\sin t, bt) \in \mathbb{R}^3.$$

où a, b sont des paramètres réels.
Afin de déterminer le repère de Serret-Frenet de la courbe. Déterminons une paramétrisation normale :

$$s(t) = \int_0^t \|f'(u)\| du$$

Or

$$f'(u) = (-a\sin u, a\cos u, b)$$

Alors

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{a^2+b^2} du = t\sqrt{a^2+b^2}$$

Donc

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

D'où

$$s^{-1} : s \longmapsto \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

On a

$$g(s) = f \circ s^{-1} = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

Vecteur tangent unitaire

$$\overrightarrow{T} = g'(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b)$$

Courbure

$$\rho(s) = \|g''(s)\| = \frac{a}{a^2+b^2}$$

Vecteur normal unitaire

$$\overrightarrow{N}(s) = \frac{g''(s)}{\|g''(s)\|} = (-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0)$$

Vecteur Binormal

$$\overrightarrow{B}(s) = \overrightarrow{T}(s) \wedge \overrightarrow{N}(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a)$$

Torsion

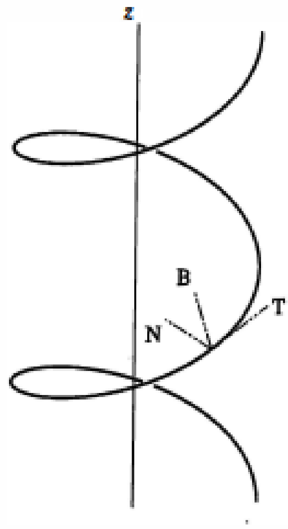
$$\frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = \tau(s)\overrightarrow{N}(s)$$

tout calcul fait, on trouve

$$\tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

En conclusion les invariants de Serret-Frenet de l'hélice sont comme suit :

$$\begin{cases} \rho(s) = \frac{a}{a^2+b^2} \\ \tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2} \\ T = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b) \\ N = (-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0) \\ B = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a) \end{cases}$$



3.2 Hélice oblique

Définition 28. Soit $f = f(s)$ une courbe régulière à vitesse unité de courbure $\rho(s) \neq 0.f$ est dite hélice oblique si la normale principale fait un angle constant avec une direction fixe.

Proposition 29. Propriété caractéristique de l'hélice oblique
Soit $\gamma = \gamma(s)$ une courbe régulière de courbures ρ et τ. La courbe γ est une hélice oblique si et seulement si la courbure géodésique

$$\sigma(s) = \left[\frac{\rho^2}{(\rho^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\rho} \right)' \right]$$

de la normale principale est une fonction constante.

Remarque 13. L'hélice générale est un cas particulier de l'hélice oblique.

Exemple 30. Courbe de précession constante
On considère la courbe à vitesse unité, notée $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, définie par :

$$\begin{cases} \gamma_1(s) = \frac{\alpha+\mu}{2\alpha} \frac{\sin[(\alpha-\mu)s]}{\alpha-\mu} - \frac{\alpha-\mu}{2\alpha} \frac{\sin[(\alpha+\mu)s]}{\alpha+\mu} \\ \gamma_2(s) = -\frac{\alpha+\mu}{2\alpha} \frac{\cos[(\alpha-\mu)s]}{\alpha-\mu} + \frac{\alpha-\mu}{2\alpha} \frac{\cos[(\alpha+\mu)s]}{\alpha+\mu} \\ \gamma_3(s) = \frac{\omega}{\mu\alpha} \sin(\mu s) \end{cases}$$

où

$$\alpha = \sqrt{\omega^2 + \mu^2}$$

et ω, μ sont des constantes.

Ses courbures sont exprimées de la façon suivante

$$\begin{cases} \rho(s) = -\omega \sin(\mu s) \\ \tau = \omega \cos(\mu s)) \end{cases}$$

En particulier pour $\alpha = 26, \omega = 24$ et $\mu = 10, \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ devient

$$\begin{cases} \gamma_1(s) = \frac{9}{208} \sin(16s) - \frac{1}{117} \sin(36s) \\ \gamma_2(s) = -\frac{9}{208} \cos(16s) + \frac{1}{117} \cos(36s) \\ \gamma_3(s) = \frac{6}{65} \sin(10s) \end{cases}$$

Ainsi que

$$\begin{cases} \rho(s) = -24 \sin(10s) \\ \tau = 24 \cos(10s) \end{cases}$$

On a

$$\gamma' = \begin{cases} \gamma_1' = \frac{9}{13} \cos(16s) - \frac{4}{13} \cos(36s) \\ \gamma_2' = \frac{9}{13} \sin(16s) - \frac{4}{13} \sin(36s) \\ \gamma_3' = \frac{12}{13} \cos(10s) \end{cases}$$

$$\gamma'' = \begin{cases} \gamma_1'' = \frac{-144}{13} \sin(16s) - \frac{144}{13} \sin(36s) \\ \gamma_2'' = \frac{-144}{13} \cos(36s) - \frac{144}{13} \cos(16s) \\ \gamma_3'' = \frac{-120}{13} \sin(10s) \end{cases}$$

Alors les vecteurs du repère de Serret-Frenet le long de la courbe γ sont donnés comme suit :

La tangente : On a

$$\overrightarrow{T} = \gamma'(s)$$

Alors

$$T = \begin{cases} \gamma_1' = \frac{9}{13} \cos(16s) - \frac{4}{13} \cos(36s) \\ \gamma_2' = \frac{9}{13} \sin(16s) - \frac{4}{13} \sin(36s) \\ \gamma_3' = \frac{12}{13} \cos(10s) \end{cases}$$

La normale principale : On a

$$\overrightarrow{N}(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$$

Alors

$$N = \begin{cases} N_1 = \frac{6}{13} \frac{\sin(16s)}{\sin(10s)} - \frac{6}{13} \frac{\sin(36s)}{\sin(10s)} \\ N_2 = -\frac{6}{13} \frac{\cos(16s)}{\sin(10s)} + \frac{6}{13} \frac{\cos(36s)}{\sin(10s)} \\ N_3 = \frac{5}{13} \end{cases}$$

Le binormal : On a

$$\overrightarrow{B}(s) = \overrightarrow{T}(s) \wedge \overrightarrow{N}(s)$$

Alors

$$B = \begin{cases} B_1 = \frac{45}{169}\sin(16s) - \frac{20}{169}\sin(36s) + \frac{72}{169}\frac{\cos(16s)}{\tan(10s)} - \frac{72}{169}\frac{\cos(36s)}{\tan(10s)} \\ B_2 = -\frac{45}{169}\cos(16s) + \frac{20}{169}\cos(36s) + \frac{72}{169}\frac{\sin(16s)}{\tan(10s)} - \frac{72}{169}\frac{\sin(36s)}{\tan(10s)} \\ B_3 = -\frac{156}{169}\sin(10s) \end{cases}$$

Conclusion

On s'est penché dans ce travail au repère de Frenet d'une courbe régulière en évoquant dans un premier lieu la notion des courbes et leurs propriétés métrique, on a ensuite défini le repère de Frenet ainsi que sa base et son importance qui se manifeste dans les calculs de courbure, de torsion et d'introduire des concepts géométriques associés aux courbes.
A la fin nous avons illustré les résultats que nous avons récolté sur des courbes spéciales comme l'hélice générale et l'hélice oblique.

Références

[1] Dr. OUAZZANI Amina, *cours de Géométrie Des Courbes Et Des Surfaces. Master Analyse Mathématique et Applications*, 2021-2022.

[2] Paul A. Blaga, *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces.*

[3] Wolfgang Kühnel, *Differential Geometry Curves – Surfaces–Manifolds.*

[4] Pierron Théo, *Géométrie différentielle.*

[5] M. Audin, *Géométrie*, 2006.

[6] M. Berger, B. Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, 1992.

[7] J.Lelong-Ferrand. J.M.Arnaudiés, *Cours de Mathématiques, Tome 3, Géométrie et cinématique*, 1997.

[8] G. Comte, *Convexité, Analyse Asymptotique et Séries.*

[9] Scofield, P.D, *Curves of Constant Precession.*