Université Hassan II Casablanca
Faculté des Sciences Ben M'sik
Département de Mathématiques et Informatique

FILIERE : SCIENCES MATHEMATIQUES & APPLICATIONS

MODULE : PROJET DE FIN D'ETUDES

COORDONNATEUR : Youssef EL FOUTAYENI

PROJET DE FIN D'ÉTUDE

ÉTUDE GÉNÉRALE DES OPÉRATEURS SUR LES ESPACES DE HILBERT

Réalisé par : Imane AIT IDAR

Encadré par : Pr. Bouchra AHARMIM

Présenté et soutenu devant le jury composé de :

Pr. Bouchra AHARMIM	*Encadrante*
Pr. Amina OUAZZANI CHAHDI	*Présidente*
Pr. Malika IZID	*Examinatrice*

2021 -2022

REMERCIEMENTS

Au premier lieu je remercie Dieu, le tout puissant pour m'avoir donné le courage et la patience pour avoir mené à bien ce travail durant ce semestre.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma encadrante **Mme. AHARMIM Bouchra**. Je la remercie de m'avoir encadrée, orientée, aidée et conseillée.

Mes remerciements s'étendent également à **Mme. Amina OUAZZANI CHAHDI**, qui m'a fait l'honneur d'avoir accepté de présider mon jury de soutenance. Je remercie également **Mme. Malika IZID** d'avoir accepté d'examiner mon travail.

J'adresse encore mes vifs remerciements et mes profonds respects à tous les enseignants de la faculté des sciences Ben M'sik, plus particulièrement ceux du département de mathématiques ainsi que le corps professoral et administratif de notre faculté.

Finalement, j'espère que mon travail soit à la hauteur des exigences formulées.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel (resp. complexe) muni d'un produit scalaire euclidien (resp. hermitien), qui permet de mesurer des longueurs et des angles et de définir une orthogonalité. De plus, un espace de Hilbert est complet, ce qui permet d'y appliquer des techniques d'analyse. Ces espaces doivent leur nom au mathématicien allemand David Hilbert.

Le concept d'espace de Hilbert étend les méthodes de l'algèbre linéaire en généralisant les notions d'espace euclidien (comme le plan euclidien ou l'espace usuel de dimension 3) et d'espace hermitien à des espaces de dimension quelconque (finie ou infinie).

Des espaces de Hilbert apparaissent fréquemment en mathématiques et en physique, essentiellement en tant qu'espaces fonctionnels de dimension infinie. Les premiers espaces de Hilbert ont été étudiés sous cet aspect pendant la première décennie du xxe siècle par David Hilbert, Erhard Schmidt et Frigyes Riesz. Ils sont des outils indispensables dans les théories des équations aux dérivées partielles, mécanique quantique, analyse de Fourier (ce qui inclut des applications au traitement du signal et le transfert thermique) et la théorie ergodique qui forme le fondement mathématique de la thermodynamique. John von Neumann forgea l'expression espace de Hilbert pour désigner le concept abstrait qui sous-tend nombre de ces applications. Les succès des méthodes apportées par les espaces de Hilbert menèrent à une époque très prolifique pour l'analyse fonctionnelle. En plus des espaces euclidiens classiques, les exemples les plus courants d'espaces de Hilbert sont les espaces de fonctions de carré intégrable, les espaces de Sobolev qui sont constitués de fonctions généralisées, et les espaces de Hardy de fonctions holomorphes.

L'intuition géométrique intervient dans de nombreux aspects de la théorie des espaces de Hilbert. Ces espaces possèdent des théorèmes analogues au théorème de Pythagore et à la règle du parallélogramme. En mathématiques appliquées, les projections orthogonales sur un sous-espace (ce qui correspond à aplatir l'espace de quelques dimensions) jouent un rôle important dans des problèmes d'optimisation entre autres aspects de la théorie. Un élément d'un espace de Hilbert peut être défini de manière unique par ses coordonnées relativement à une base de Hilbert, de façon analogue aux coordonnées cartésiennes dans une base orthonormale du plan. Quand cet ensemble d'axes est dénombrable, l'espace de Hilbert peut être vu comme un ensemble de suites de carré sommable. Les opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert sont semblables à des objets concrets : dans les "bons" cas, ce sont simplement des transformations qui étirent l'espace suivant différents coefficients dans des directions deux à deux perpendiculaires, en un sens qui est précisé par l'étude de leur spectre.

CHAPITRE 1

ESPACES DE HILBERT

1.1 Produit scalaire et Orthogonalité

Produit scalaire

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1.1.1

Un produit scalaire sur E est une application $< .,. >: E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ qui est :

— **Linéaire par rapport à la $1^{\text{éme}}$ variable :**

$$\forall x, x', y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \, \langle x + \lambda x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \lambda \langle x', y \rangle$$

— **anti-linéaire par rapport à la $2^{\text{éme}}$ variable :**

$$\forall x, y, y' \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \, \langle x, y + \lambda y' \rangle = \langle x, y \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y' \rangle$$

— **hermitienne :** $\forall x, y \in E \quad \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$

— **définie positive :** $\forall x \in E \backslash \{0\}, \langle x, x \rangle > 0$ et $\langle x, x \rangle = 0$ ssi $x = 0$

Un espace muni d'un produit scalaire est dit espace préhilbertien.

Notation 1.1.2

Si φ est un produit scolaire, on le note souvent par :

$$\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle \text{ ou } \langle x \mid y \rangle \text{ ou } (x \mid y)$$

— Si E est un espece préhilbertien réel de dimensen finie, On dit que c'est un espace euclidien.

— Si E est un espace préhilbertien complexe de dimension finie, On dit que c'est un espace hermitien. où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Exemples.

1) Sur $\mathbb{C}^n$ l'application $(x, y) \longrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ est un produit scalaire, appelé produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$.

2) Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ sur $C(K, \mathbb{C})$, l'application $(f, g) \longmapsto \int_K f(x)\overline{g(x)}dx$ est un produit scalaire.

3) Soit $\ell^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $\mathbf{x} = (x_n)$, avec n dans $\mathbb{N}$ et x_n dans $\mathbb{K}$, telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$$

Soient $\mathbf{x} = (x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_n)$ deux éléments de l'ensemble $\ell^2(\mathbb{N})$, l'inégalité $2|x_i y_i| \leq |x_i|^2 + |y_i|^2$ montre que la série $\sum x_i \bar{y}_i$ est absolument convergente et on en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(|x_i|^2 + |y_i|^2 + 2\Re e\,(x_i \bar{y}_i) \right) \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \left(|x_i|^2 + |y_i|^2 \right) \end{aligned}$$

Ces inégalités montrent que $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ est dans $\ell^2(\mathbb{N})$, celui-ci est donc un sous espace vectoriel de l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On pose, pour $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$$

On vérifie que cela définit bien un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{N})$

Proposition (L'inégalité de Cauchy-schwartz)

Soit E un espace préhilbertien complexe, alors

$$\forall x, y \in E \qquad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\ \|y\|$$

Preuve.

— L'inégalité est vraie si $y = 0$

— On suppose que $y \neq 0$, on pose alors $f(\lambda) = \|x+\lambda y\|^2 \quad (\forall \lambda \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \|x+\lambda y\|^2 = \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,\lambda y\rangle + \langle \lambda y, x\rangle + \langle \lambda y,\lambda y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x,\lambda y\rangle + \overline{\langle x,\lambda y\rangle} + \lambda\overline{\lambda}\langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \overline{\lambda}\,\langle x,y\rangle + \overline{\overline{\lambda}\langle x,y\rangle} + |\lambda|^2\|y\|^2 \\ f(\lambda) &= \|x\|^2 + 2Re\left(\overline{\lambda}\langle x,y\rangle\right) + \mid \lambda \mid^2 \|y\|^2 \end{aligned}$$

Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\langle x,y\rangle =\mid \langle x,y\rangle \mid e^{i\theta_0}$ et posons $g(r) = f(re^{i\theta_0}) \quad (\forall r \in \mathbb{R})$.
On a donc $(\forall r \in \mathbb{R})$ $g(r) = \|x\|^2 + 2Re(\overline{re^{i\theta_0}}\langle x,y\rangle) + r^2\|y\|^2$

$$\begin{aligned} g(r) &= \|x\|^2 + 2Re(re^{-i\theta_0}\langle x,y\rangle >) + r^2\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2Re(re^{-i\theta_0} \mid \langle x,y\rangle \mid e^{i\theta_0}) + r^2\|y\|^2 \\ &= r^2\|y\|^2 + 2 \mid \langle x,y\rangle \mid r + \|x\|^2 \quad \forall r \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

La fonction g est un polynôme de degré 2 en r qui reste positif $(\forall r \in \mathbb{R})$ son discriminant $\Delta = 4|\langle x,y\rangle|^2 - 4r^2\|x\|^2\|y\|^2$ est négatif donc $(\forall x,y \in E) \quad |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|^2\|y\|^2$

Remarque

L'égalité est réalisée ssi x et y pas liés.

Supposons d'abord que x et y sont liés.
Comme l'égalité est symétrique en x et y, on peut supposer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$, alors on a $\|x\|^2 = \langle x,y\rangle = \lambda\overline{\lambda} < y,y >= |\lambda|\|y\|^2$ et $|\langle x,y\rangle|^2 = |\lambda\langle y,y\rangle|^2 = |\lambda|^2\|y\|^4 = |\lambda|^2\|y\|^2\|y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2$
d'où $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\|$
Réciproquement, Supposons que l'on a $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\|$.
Si $y = 0$ alors x et y sont liés.
Supposons donc $y \neq 0$, alors on a $\|y\| \neq 0$.

On calcule $\left\|x-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}y\right\|^2$,

$$\begin{aligned}\left\|x-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}y\right\|^2 &= \left\langle x-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}y, x-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2 y}\right\rangle\\ &= \|x\|^2-\left\langle x,\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}y\right\rangle-\left\langle\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}y,x\right\rangle\\ &+\left\langle\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}y,\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}y\right\rangle\\ &= \|x\|^2-\overline{\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}}\langle x,y\rangle-\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\langle y,x\rangle+\left\|\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}y\right\|^2\\ &= \|x\|^2-\frac{2|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}+\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}\\ &= \|x\|^2-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}=\frac{\|x\|^2\|y\|^2-|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}=0\end{aligned}$$

par conséquent, on a $x=\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}y$
donc x et y ne sont pas linéairement indépendants

Proposition

Soit $(E,\langle .,.\rangle)$, un $\mathbb{K}$ espace préhilbertien, muni de la norme associée au produit scalaire, alors $(x,y)\longmapsto\langle x,y\rangle$ est une application continue de $E\times E$ dans $\mathbb{K}$.

Preuve.

Soit $(x_0,y_0)\in E$. Pour tout $(x,y)\in E\times E$, on a

$$\langle x,y\rangle=\langle x_0+(x-x_0),y_0+(y-y_0)\rangle$$

$$=\langle x_0,y_0\rangle+\langle x_0,y-y_0\rangle+\langle x-x_0,y_0\rangle+\langle x-x_0,y-y_0\rangle$$

i.e $|\langle x,y\rangle-\langle x_0,y_0\rangle|=|\langle x_0,y-y_0\rangle+\langle x-x_0,y_0\rangle+\langle x-x_0,y-y_0\rangle|$

$$\langle|\langle x_0\mid y-y_0\rangle|+|\langle x-x_0,y_0\rangle|+|\langle x-x_0,y-y_0\rangle|$$

et d'après l'inégalite de Cauchy-schwartz on a

$$|\langle x,y\rangle-\langle x_0,y_0\rangle|\leqslant\|x_0\|\,\|y-y_0\|+\|x-x_0\|\,\|y_0\|+\|x-x_0\|\,\|y-y_0\|$$

Les termes $\|x-x_0\|$ et $\|y-y_0\|$ tendent vers zéro.
Par conséquent l'application $(x,y)\longmapsto\langle x,y\rangle$ est continue en (x_0,y_0)

Proposition

Si $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E, on peut définir une norme sur E, dite norme hilbertienne ou hermitienne associée, en posant $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Preuve. L'application $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est bien une norme car :

- $\forall x \in E$, si $\|x\| = 0$ alors $x = O_E$ car $\langle \cdots, . \rangle$ est définie positive.
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \, \|x\|$
- Il reste à établir l'inégalité triangulaire pour $x, y \in E$. Comme $Re|\langle x, y \rangle| \leqslant |\langle x, y \rangle|$ l'inégalite de Cauchy - schwartz donne

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle &= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|y\|\| + \|y\|^2 \\ &\leqslant (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Définition 1.1.3

Un espace de Hilbert est un espace prehilbertien sur $\mathbb{K}$ qui est complet pour la distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.

Un espace de Hilbert est donc encore un espace de Banach, dont la norme provient d'un produit scalaire.

Exemples :

1) L'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire usuel est un espace de Hilbert.

On a vu à l'exemple précédent que $\ell^2(\mathbb{N})$, muni du produit scalaire est un espace préhilbertien, il reste à montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ est complet pour la distance associée au produit scalaire usuel. Soit donc $(\mathbf{x}^n)$ une suite de Cauchy dans $\ell^2(\mathbb{N})$, avec

$$\mathbf{x}^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots)$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall p, q \geq r$ $\|x^p - x^q\| < \sqrt{\varepsilon}$

$$\|x^p - x^q\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n^p - x_n^q|^2 < \epsilon$$

Pour tout entier m, on aura a fortiori

$$\sum_{n \leq m} |x_n^p - x_n^q|^2 \leq \epsilon$$

comme il s'agit ici d'une somme finie, on peut faire tendre q vers l'infini et on obtient l'inégalité

$\sum_{n\leq m}|x_n^p-x_n|^2\leq\epsilon$. Cela étant pour tout entier m, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^p-x_n|^2\leq\epsilon$$

Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé on a $|x_n^p-x_n{}^q|^2\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|x_k^p-x_k^q|^2<\varepsilon$
Ce qui implique $\forall n\in\mathbb{N},\exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall p,q\geqslant N$ on a $|x_n^p-x_n^q|<\sqrt{\varepsilon}$
d'où $(x_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
Puisque $\mathbb{R}$ est complet alors elle converge vers un point $x_k\in\mathbb{R}$
On pose $x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\forall M\in\mathbb{N}$ et $q,p\geqslant N$, on a

$$\sum_{k=0}^{M}|x_k^q-x_k^p|^2\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}|x_k^q-x_k^p|^2\leqslant\varepsilon$$

En passant à la limite lorsque $q\to+\infty$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{M}|x_k-x_k^p|^2=\sum_{k=0}^{M}\lim_{q\to+\infty}|x_k^q-x_k^p|^2=\lim_{q\to+\infty}\sum_{k=0}^{M}|x_k^q-x_k^p|^2\leqslant\varepsilon$$

et finalement en faisant tendre M vers $+\infty$ on obtient

$$\forall p\geqslant N\quad\sum_{k=0}^{+\infty}|x_k-x_k^p|^2\leqslant\varepsilon$$

$i\cdot e\quad\|x-x^p\|_2\leqslant\sqrt{\varepsilon}$ d'où $x-x^p\in\ell^2(\mathbb{R})$
Comme $\varepsilon>0$ est arbitraire, on aura $\lim_{n\to+\infty}x^n=x$
En conclusion, on a

$$\begin{cases} x=x^N+\left(x-x^N\right)\in\ell^2(\mathbb{R})\\ \lim_{n\to+\infty}x^n=x\end{cases}$$

2) Soit $C[-1,1]$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1,1]$ à valeurs complexes. L'application qui à une fonction f dans $C[-1,1]$ associe

$$\|f\|_\infty=\sup_{|x|\leq1}|f(x)|$$

est une norme, dite norme de la convergence uniforme, et l'espace $C[-1,1]$ muni de cette norme est complet.

Considérons maintenant l'application qui, à deux fonctions f et g continues sur $[-1,1]$, associe

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt$$

C'est un produit scalaire sur $C[-1,1]$ et l'application

$$f \mapsto \| f|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $C[-1,1]$, dite norme de la convergence en moyenne quadratique. Mais l'espace vectoriel $(C[-1,1], \|\cdot\|_2)$ n'est pas complet :

En effet, considérons la suite des fonctions continues f_n définie sur l'intervalle $[-1,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 \leq x \leq -1/n; \\ nx+1, & \text{si } -1/n \leq x \leq 0 \\ 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad , \quad n \geqslant 1$$

Pour n et m dans $\mathbb{N}^*$, avec $m \leq n$,

$$m \leqslant n \Rightarrow -\frac{1}{m} \leqslant -\frac{1}{n}$$

— si $x \in \left[-\frac{1}{m}, 0\right]$
  — si $-\frac{1}{m} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$
    alors $f_m(x) = mx+1$ et $f_m(x) = 0$

$$f_m(x) - f_n(x) = mx + 1$$

  — si $x \in \left[-\frac{1}{n}, 0\right]$
    alors $f_m(x) = mx+1$ et $f_n(x) = nx+1$

$$f_m(x) - f_n(x) = (m-n)x \geqslant 0$$

— Si $x \in \left[-1, -\frac{1}{m}\right] \cup [0,1]$ alors $f_m - f_n$ est nulle.

et on a

$$\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^2 = \int_{-\frac{1}{m}}^{0} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \, dx \leq \frac{2}{m}$$

la suite (f_n) est donc une suite de Cauchy pour la norme $\| \ \|_2$. Nous allons voir qu'elle ne peut pas converger vers une fonction continue. En effet, supposons que f soit la fonction continue sur $[-1,1]$, vers laquelle converge la suite (f_n) ; la quantité $\|f-f_n\|_2^2$ est égale à

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} |f(x)|^2 + \int_{-\frac{1}{n}}^{0} |nx+1-f(x)|^2 dx + \int_0^1 |1-f(x)|^2 dx$$

Sur l'intervalle $[-1/n, 0]$, la fonction $nx+1$ est bornée et donc, lorsque n tend vers l'infini, l'intégrale du milieu tend vers 0 . Finalement, il reste

$$\int_{-1}^{0} |f(x)|^2 dx + \int_0^1 |1-f(x)|^2 dx = 0$$

c'est-à-dire que la limite f est forcément donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Ceci est en contradiction avec l'hypothèse de continuité de f. Donc aucune fonction continue ne peut être la limite de (f_n).

Proposition (L'égalité du parallélogramme)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Preuve.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle$$
$$= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$
$$= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Proposition (Inégalité de polarisation)

$\forall x, y \in E \quad \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$

Preuve.

Il suffit de remarquer que, par définition de la norme, on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2Re\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$
$$\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + 2Im\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$
$$\|x-iy\|^2 = \|x\|^2 - 2Im\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

On constate que $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4Re\langle x,y\rangle$

$$\text{et } \|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 = 4Im\langle x,y\rangle$$

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \mathrm{Re}\langle x,y\rangle + i\,\mathrm{Im}\langle x,y\rangle \\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + i\frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)\end{aligned}$$

Orthogonalité

Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$.

On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $\langle x,y\rangle = 0$ on note alors $x \perp y$

Théorème de Pythagore

Soit E un espace préhilbertien.

Supposons que $x \perp y$, alors on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Preuve.

On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re\langle x,y\rangle + \|y\|^2$ Or $\langle x,y\rangle = 0$ donc $\|x+y\|^2 = \Big| x\,\|^2 + \mid y\|^2$

Définition

Pour tout $x \in E$, on définit l'orthogonal de x par la formule $x^{\perp} = \{y \in E / \ \ \langle x,y\rangle = 0\}$
Plus généralement, pour tout sous-ensemble A non vide de E, on définit l'orthogonal de A par $A^{\perp} \overset{\text{Def}}{=} \{y \in E / \forall x \in A \quad \langle x,y\rangle = 0\}$ - On dit que deux parties non vides A et B de E sont orthogonales si pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in B$, on a $\langle x,y\rangle = 0$. Dans ce cas on note $A \perp B$.

Théorème de Pythagore

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien.

Si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille finie d'éléments deux à deux orthogonaux dans E, alors on a

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i, x_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\end{aligned}$$

Proposition

Soit E un espace de Hilbert.

1) L'orthogonal d'un sous ensemble F de E est un sous espace fermé de E et on a

   a) $F \cap F^{\perp} = \{0\}$

   b) Si deux sous ensembles F et G de E vérifient $F \subset G$, alors leurs orthogonaux vérifient $G^{\perp} \subset F^{\perp}$

   c) $F^{\perp} = (\overline{F})^{\perp}$

   d) $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$

Preuve.

1) $\star$) $\bullet$ $0_E \in F^{\perp}$ car $\forall x \in F \quad \langle x, 0_E \rangle = 0$

$\bullet\bullet$ Soient $a \in F, \quad x, y \in F^{\perp}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a $\langle x + \lambda y, a \rangle = \langle x, a \rangle + \lambda \langle y, a \rangle = 0$ donc $x + \lambda y \in F^{\perp}$ par conséquent $F^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de E.

$\star$) Montrons que $F^{\perp}$ est fermé dans E.

Soit (x_n) une suite convergente dans $F^{\perp}$ et soit x sa limite.

Pour tout y dans F, on a

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle x - x_n, y \rangle| \leqslant \|x - x_n\| \, \|y\|$$

Le membre de droite de cette inégalité tend vers zéro quand n tend vers l'infini et donc $\langle x, y \rangle = 0$. Ceci étant pour tout $y \in F$, on en déduit que x appartient à $F^{\perp}$ et donc $F^{\perp}$ est fermé.

a) Soit $x \in F \cap F^{F}$ donc $\langle x, x \rangle = 0$ donc $x = 0$ donc $F \cap F^{\perp} \subset \{0\}$ et si $x = 0$ donc $x \in F \cap F^{\perp}$ donc $F \cap F^{\perp} = \{0\}$

$\star$) puisque $F \subset F^{\perp}$ on a l'inclusion $\overline{F}^{\perp} \subset F^{\perp}$

Soit alors x un élément de $F^{\perp}$ et y un élément de $\overline{F}$, il existe une suite (y_n) d'éléments de F telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|y - y_n\| = 0$.

On a alors $|\langle x, y \rangle| = |\langle x, y - y_n \rangle| + |\langle x, y_n \rangle| \leqslant \|x\| \, \|y - y_k\|$

le membre de droit tend vers zéro quand n tend vers l'infini et il en résulte que $\langle x, y \rangle = 0$.

Ainsi $F^{\perp} \subset (\overline{F})^{\perp}$

$\star$) Si $x \in F$ alors $\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in F^{\perp}$ donc $x \in \left(\overline{F}^{\perp}\right)^{\perp}$.

Proposition

Si F et G sont deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert E et s'ils sont orthogonaux, $F \perp G$, alors l'ensemble $F+G$ des éléments de la forme $x+y$, avec $x \in F$ et $y \in G$, est un sous-espace fermé de E.

Démonstration. Il est clair que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E. Soit (z_n) une suite de Cauchy dans $F+G$, pour tout n il existe $x_n \in F$ et $y_n \in G$ tels que $z_n = x_n + y_n$, et on a

$$\begin{aligned}
&\|z_n - z_m\|^2 = \|(x_n - x_m) + (y_n - y_m)\|^2 \\
&= \langle (x_n - x_m) + (y_n - y_m), (x_n - x_m) + (y_n - y_m) \rangle \\
&= \|x_n - x_m\|^2 + \langle x_n - x_m, y_n - y_m \rangle + \langle y_n - y_m, x_n - x_m \rangle + \|y_n - y_m\|^2
\end{aligned}$$

Puisque $x_n - x_m \in F$ et $y_n - y_m \in G$ et $F \perp G$

donc

$$\|z_n - z_m\|^2 = \|x_n - x_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2$$

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq \|z_n - z_m\|^2$$

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq \|z_n - z_m\|^2$$

donc (x_n) et (y_n) sont des suites de Cauchy dans F et G respectivement. Comme F et G sont fermés, (x_n) converge vers un élément x de F et (y_n) converge vers un élément y de G et par suite $\lim_{n\to\infty} z_n = x + y$ appartient bien à $F+G$. ■

Projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert et applications.

Introduction

Le théorème de projection sur un convexe fermé est un outil fondamental de la théorie des espaces de Hilbert. Grâce à ce théorème nous déduirons la structure du dual d'un espace de Hilbert et nous serons en mesure de construire l'adjoint d'une application linéaire continue entre deux espaces de Hilbert.

Théorème

Soient H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de H. Pour tout $x \in H$, il existe un et un seul point $y \in C$ tel que $d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\| = \|x - y\|$ et on appelle $y = p_C(x)$ le projecté orthogonal de x sur C. Il est caractérisé par :

$$y = p_C(x) \Longleftrightarrow \forall z \in C, \mathrm{Re}(\langle y - x, y - z \rangle) \leq 0$$

Démonstration.

Objectif 1. Existence du projeté orthogonal.

On pose $d = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$. Puisque $d^2 = \inf_{z \in C} \|x - z\|^2$, par définition de la borne inférieure, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists y_n \in C, \|x - y_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}.$$

Montrerons que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Par l'identité du parallélogramme $\|z - z'\|^2 = 2\|z\|^2 + 2\|z'\|^2 - \|z + z'\|^2$ appliquée à $z = y_n - x$ et $z' = y_p - x$ on a :

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_p\|^2 &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_p - x\|^2 - \|y_n + y_p - 2x\|^2 \\
&= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_p - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_p + y_n}{2} - x\right\|^2 \\
&\leq \left(2d^2 + \frac{2}{n}\right) + \left(2d^2 + \frac{2}{p}\right) - 4d^2 \\
&\leq \quad \frac{2}{n} + \frac{2}{p}
\end{aligned}$$

car C étant convexe, $\frac{y_n + y_p}{2} \in C$ et $\left\|\frac{y_p + y_n}{2} - x\right\| \geq d$. Ainsi comme $\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{p \mapsto +\infty} \frac{1}{p} = 0$ on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq N, \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \leq \varepsilon$$

et on en déduit que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy. Puisque H est complet, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et on note sa limite $y \in C$ car C est fermé. Par continuité de la norme on a alors : $\lim_{n \to \infty} \|y_n - x\|^2 = \|y - x\|^2$ puis :

$$\|y - x\|^2 \leq \lim_{n \mapsto \infty} d^2 + \frac{1}{n} = d^2$$

Donc $\|y - x\| \leq d$ et par définition de d, $\|y - x\| \geq d$ soit $\|y - x\| = d = d(x, C)$.

Objectif 2. Unicité du projeté orthogonal.

Supposons par l'absurde qu'il existe $y \neq y'$ tels que $d = \|x - y\| = \|x - y'\|$. Comme C est convexe $\frac{y + y'}{2} \in C$ et par l'identité du parallélogramme on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{y + y'}{2} - x\right\|^2 &= \left\|\frac{1}{2}(y - x) + \frac{1}{2}(y' - x)\right\|^2 \\
&= 2 \times \frac{1}{4}\|y - x\|^2 + 2 \times \frac{1}{4}\|y' - x\|^2 - \frac{1}{4}\|y - y'\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\|y - x\|^2 + \|y' - x\|^2\right) - \frac{1}{4}\|y - y'\|^2 \\
&= d^2 - \frac{1}{4}\|y - y'\|^2 \\
&< d^2
\end{aligned}$$

Absurde, par définition de d.

Objectif 3. CNS pour être le projeté orthogonal de x sur C.

Supposons dans un premier temps que y est le projeté orthogonal de x sur C et soit $z \in C$. Par convexité de $C, (1-\lambda)y + \lambda z \in C$ pour $\lambda \in [0,1]$ (le segment $[y,z]$ est contenu dans C). Par définition du projeté orthogonal on a :

$$\|x - ((1-\lambda)y + \lambda z))\|^2 = \| x - y + \lambda(y-z) \|^2 \geq d^2 = \| x - y\|^2$$

En développant, il vient : $\|x-y\|^2 + 2\lambda \operatorname{Re}(\langle x-y, y-z\rangle) + \lambda^2\|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2$ soit :

$$2\lambda \operatorname{Re}(< x-y, y-z >) + \lambda^2\|y-z\|^2 \geq 0$$

et pour $\lambda \neq 0, 2\operatorname{Re}(\langle x-y, y-z\rangle) + \lambda\|y-z\|^2 \geq 0$. En faisant tendre λ vers 0 dans l'expression ci-dessus, on a bien :

$$\operatorname{Re}(\langle x-y, y-z\rangle) \geq 0 \iff \operatorname{Re}(\langle y-x, y-z\rangle) \leq 0.$$

Inversement, supposons la condition ci-dessus satisfaite et montrons que y est alors le projeté orthogonal de x sur C. Il suffit de montrer que la condition ci-dessus implique que pour tout $z \in C$, on a : $\|z-x\| \geq \|y-x\|$. Or,

$$\begin{aligned} \|z-x\|^2 &= \|(z-y)-(x-y)\|^2 \\ &= \|y-x\|^2 + \|z-y\|^2 \underbrace{-2\operatorname{Re}(< y-x, y-z >)}_{\geq 0} \geq \|y-x\|^2 \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Corollaire

Soit C un sev fermé de H (en particulier C est naturellement convexe). Alors, $H = C \oplus C^\perp$ et p_C est une application linéaire continue.

Démonstration. Si $x \in C \cap C^\perp$, on a en particulier $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0$ et $x = 0$. Démontrons désormais que $H = C + C^\perp$. Pour ce faire, considérons un point $x \in H$ et notons y le projeté orthogonal de x sur C. Notre objectif est de montrer que x se décompose sous la forme :

$$x = (x-y) + y \text{ où } x - y \in C^\perp.$$

Considérons $z \in C$ et montrons donc que $\langle x-y, z\rangle = 0$. Pour $u \in \mathbb{K}$, comme C est un espace vectoriel, $y+uz \in C$ et d'après ce qui précède on a :

$$\mathrm{Re}(\langle y-x, y-(y+uz)\rangle) = \mathrm{Re}(\langle y-x, -uz\rangle) = \mathrm{Re}(\langle x-y, uz\rangle) \leq 0$$

Prenant $u =< x-y, z >\in \mathbb{K}$. On a :

$$\mathrm{Re}(\langle x-y, uz\rangle) = \mathrm{Re}(\bar{u} < x-y, z\rangle) = \mathrm{Re}(u\bar{u}) = \|u\|^2 \leq 0 \Longrightarrow u = 0.$$

Ce qui montre bien que $x-y \in C^{\perp}$ et donne la décomposition annoncée.

Objectif 4. montrer que p_C est linéaire continue. Puisque $H = C \oplus C^{\perp}$ l'application définie par :

$$\forall x = x_1 + x_2 \in H = C \oplus C^{\perp}, P(x) = P(x_1 + x_2) = x_1$$

est la projection orthogonale sur C parallèlement à $C^{\perp}$, qui est clairement linéaire. D'après la première partie du corollaire $P = P_C$ et quant à la continuité, on a pour $x \in C$ et $y \in C^{\perp}$:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2 = \|p_C(x+y)\|^2$$

Il en résulte que pour tout $z \in H$, on a $\|p_C(z)\| \leq \|z\|$ et donc p_C est continue avec $\|p_C\| \leq 1$. En application, voici l'important théorème de caractérisation du dual d'un espace hilbertien :

Théorème (Représentation de Riesz-Fréchet)

Soit f une forme linéaire continue sur H. Alors, il existe un unique vecteur $a \in H$ tel que $f(x) =< x, a >$ pour tout $x \in H$.

Démonstration. Éliminons pour commencer le cas où $f = 0$, dans ce cas $a = 0$ convient. Sinon $f \neq 0$ implique que $\mathrm{Ker}(f) \neq H$ et que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sev fermé car f est continue. D'après le théorème précédent, on a alors la décomposition $H = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$. Comme $\mathrm{Ker}(f) \neq H$, on a $\mathrm{Ker}(f)^{\perp} \neq \{0\}$. Considérons alors un élément h non nul dans $\mathrm{Ker}(f)^{\perp}$. Pour $x \in H$, on a naturellement $x - \frac{f(x)}{f(h)}h \in \mathrm{Ker}(f) \Longrightarrow < x - \frac{f(x)}{f(h)}h, h >= 0$. En développant l'expression ci-dessus, on a donc :

$$< x, h >=< \frac{f(x)}{f(h)}h, h >= \frac{f(x)}{f(h)}\|h\|^2 \Longrightarrow f(x) =< x, \frac{\overline{f(h)}}{\|h\|^2}h >$$

Le vecteur $a = \frac{\overline{f(h)}}{\|h\|^2}h$ convient donc. Montrons pour finir qu'il est unique. Pour ce faire, supposons qu'il existe $a' \in H$ tel que pour tout $x \in H, f(x) =< x, a' >$. On a alors :

$$\forall x \in H, < x, a' >=< x, a > \Longrightarrow \forall x \in H, < x, a' - a >= 0$$

Ainsi $a - a' \in H^{\perp} = \{0\}$, ce qui nous donne l'unicité.

Remarque

Si H est hilbertien complexe, l'application $x \longmapsto < a, x >$ n'est pas linéaire, mais semi-linéaire d'où l'importance de placer l'élément a à droite dans l'écriture $< x, a >$.

1.2 Systèmes orthonormés et base hilbertienne

Systèmes orthonormés

Définition

Un système $\{x_i\}_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace vectoriel H sur $\mathbb{K}$ est un système libre si pour toute partie finie $J \subset I$ la combinaison linéaire finie $\sum_{j \in J} \lambda_j x_j = 0$ si et seulement si $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in J$.

En d'autres termes, le vecteur nul 0 a une écriture unique dans

$$\text{vect}\left\{\{x_i\}_{i \in I}\right\} := \left\{\sum_{j \in J} \lambda_j x_j \mid \text{ pour toute partie finie } J \subset I \text{ et } \lambda_j \in \mathbb{K}\right\}.$$

Définition

Un système $\{x_i\}_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien H sur $\mathbb{K}$ est un système orthogonal si, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ pour tout $i, j \in I$ tels que $i \neq j$; en d'autres termes, le système est constitué de vecteurs de H orthogonaux deux à deux.

Définition

Un système orthogonal $\{x_i\}_{i \in I}$ de vecteurs d'un préhilbertien H est un système orthonormé si $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.

Remarque

Dans le cas particulier où $I = \mathbb{N}$ (ou dénombrable), un système orthonormé (respectivement orthogonal) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est appelé parfois suite orthonormée (resp. orthogonale).

Exemple

Dans $\mathbf{R}^n$ (ou $\mathbf{C}^n$) muni du produit scalaire standard le système $\{e_1, \cdots, e_n\}$, donnépar

$$e_1 = (1, 0 \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0 \cdots, 0), \ldots, e_k = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{k-1}, 1, 0, \cdots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 1)$$

est une suite orthonormée.

Exemple

L'espace de Hilbert $L^2[-\pi, \pi]$ mumi du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{y(t)}dt$, le système $\{e_n\}$, pour $n \in \mathbb{Z}$, où la fonction $e_n : [-\pi, \pi] \to \mathbf{C}$ est définie par

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\text{int}} \quad \text{pour tout } t \in [-\pi, \pi].$$

Alors pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Si $m = m$ alors $\langle e_n, e_m\rangle = 1$

Si $m \neq m$

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_m\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(n-m)t}}{i(m-m)} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{e^{i(n-m)\pi}}{i(n-m)} - \frac{e^{-i(n-m)\pi}}{i(n-m)} \\
&= \frac{2}{(n-m)} \times \frac{1}{2i} \left(e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi} \right) \\
&= \frac{2}{(n-m)} \sin((n-m)\pi) = 0
\end{aligned}$$

Ainsi $\{e_n\}_{n \in Z}$ est une suite orthonormée, appelée suite trigonométrique.

Proposition(IDENTITÉ DE PYTHAGORE ET INÉGALITÉ DE BESSEL)

Soit H un espace préhilbertien.

Soit $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormée de H, on a alors :

(a) $\begin{cases} \forall x \in H \\ \forall N \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=0}^{N} |\langle x, e_k\rangle|^2 + \left\| x - \sum_{k=0}^{N} \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2$

(b) l'inégalité de Bessel

$$\sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2, \quad \forall x \in H$$

Démonstration :

(a) On écrit $x_1 = \sum_{k=0}^{N} \langle x, e_k\rangle e_k$ et $x_\perp = x - \sum_{k=0}^{N} \langle x, e_k\rangle e_k$. Alors, $x_\| \perp x_\perp$ et comme $x = x_\| + x_\perp$ on aura d'après l'identité de Pythagore $\|x\|^2 = \left\|x_\|\right\|^2 + \|x_\perp\|^2$.

(b) D'après (a), pour tout N entier ≥ 1 et en minorant simplement $\|x_\perp\|^2$ par 0 on aura $\sum_{n=0}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$, et par passage à la limite quand $N \to +\infty$ on obtient l'inégalité de Bessel.

$x = x_\| + x_\perp$

$x_\| = \sum_{k=0}^{N} \langle x, e_k\rangle e_k \quad x_\perp = x - \sum_{k=0}^{N} \langle x, e_k\rangle e_k$

$\|x_\perp\|^2 \geqslant 0$

$\|x\|^2 \geqslant \left\|x_\|\right\|^2 = \left\|\sum_{k=0}^{N} \langle x, e_k\rangle e_k\right\|^2$

Montrons que $\|x\|^2 \geqslant \sum_{n\geq 0} [< x, e_n > |^2 \ \forall x \in H$

$$\begin{aligned}
\left\langle x_\|, x_\perp \right\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n\rangle e_n, x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k\rangle e_k \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n\rangle e_n, x \right\rangle - \left\langle \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_k\rangle e_n, \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k\rangle e_k \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{m} \langle\langle x, e_n\rangle e_n, x\rangle - \sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \langle\langle x, e_n\rangle e_n, \langle x, e_k\rangle e_k\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n\rangle \langle e_n, x\rangle - \sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \langle x, e_n\rangle \left\langle \overline{\langle x, e_k\rangle} \langle e_{n,1} e_k\rangle \right.
\end{aligned}$$

$\left\langle x_\|, x_\perp \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle x_\perp, x_\| \right\rangle = \overline{\left\langle x_\|, x_\perp \right\rangle} = 0 \Rightarrow \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \left\langle x_\| + x_\perp, x_\| + x_\perp \right\rangle$
$\|x\|^2 = \left\langle x_\|, x_\| \right\rangle + \left\langle x_\|, x_\perp \right\rangle + \left\langle x_\perp, x_\| \right\rangle + \langle x_\perp, x_\perp\rangle$ $\|x\|^2 = \left\langle x_\|, x_\| \right\rangle + \langle x_\perp, x_\perp\rangle$; $\langle x_\perp, x_\perp\rangle \geq 0 \Rightarrow \|x\|^2 \geq \left\langle x_\|, x_\| \right\rangle$

$\|x\|^2 \geq \left\langle x_\|, x_\| \right\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n\rangle e_n, \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k\rangle e_k \right\rangle$

$\|\mathrm{x}\|^2 \geq \sum_{\mathrm{n}=1}^{m}\sum_{\mathrm{k}=1}^{m} \langle\langle \mathrm{x}, \mathrm{e_n}\rangle \mathrm{e_n}, \langle \mathrm{x}, \mathrm{e_k}\rangle \mathrm{e_k}\rangle = \sum_{\mathrm{n}=1}^{m}\sum_{\mathrm{k}=1}^{m} \langle \mathrm{x}, \mathrm{e_n}\rangle \overline{\langle \mathrm{x}, \mathrm{e_k}\rangle} \langle \mathrm{e_n}, \mathrm{e_k}\rangle$

$\langle \mathrm{e_n}, \mathrm{e_k}\rangle = \begin{cases} 1; \text{ si n} = \text{k} \\ 0; \text{ si n} \neq \text{k} \end{cases} \Rightarrow \|\|^2 \geq \sum_{\mathrm{n}=1}^{m} \langle \mathrm{x}, \mathrm{e_n}\rangle \overline{\langle \mathrm{x}, \mathrm{e_n}\rangle} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{m} |\langle \mathrm{x}, \mathrm{e_n}\rangle|^2$

$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{m} |\langle x, e_n\rangle|^2 ; \quad \forall m \geq 1 \Rightarrow \|x\|^2 \geq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$

■

Si on se donne dans un espace préhilbertien H et une suite orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, alors pour tout $x \in H$, la série de terme général $(\langle x, e_n\rangle e_n)$ est absolument convergente, et si H est en plus complet, la série est convergente.

Proposition

Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée.
Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de scalaire. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ converge dans H si et seulement si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Démonstration :

Alors que H est complet la série converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy. Pour tout $m, p \in \mathbb{N}, p > m$, l'identité de Pythagore nous donne :

$$\left\|\sum_{n=0}^{p} \alpha_n e_n - \sum_{n=0}^{m} \alpha_n e_n\right\|^2 = \left\|\sum_{n=m+1}^{p} \alpha_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=m+1}^{p} |\alpha_n|^2$$

ainsi la série $\sum\limits_{n\in N} a_n e_n$ est convergente si et seulement si la série réelles à termes positifs $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2$ vérifie le critère de Cauchy, donc converge car $\mathbb{R}$ est complet.

Remarque

Dans le cas particulier où la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est la suite $(\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathrm{N}}$, l'inégalité de Bessel nous assure de l'appartenance de cette suite à $\ell^2(\mathbb{N})$.
Ainsi, on définit une application $\Phi : H \to \ell^2(\mathbf{N})$, par $\Phi(x) = (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbf{N}}$. Cette application est linéaire, car le produit scalaire est linéaire par rapport à x et l'inégalité de Bessel assure la continuité de cette application :

$$\|\Phi(x)\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Finalement, la proposition précédente entraîne sa surjectivité, en effet, pour toute suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, le vecteur $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n \in H$ et vérifie $\Phi\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n\right) = (\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Sommes et bases hilbertiennes

Définition

Soit H un espace de Hilbert et $\{E_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels fermés de H. On dit que H est la somme hilbertienne des E_n, si :

1. $E_m \perp E_n$ pour tous entiers m, n tels que $m \neq n$.
2. 2) l'espace engendré par les E_n est dense dans H. On note dans ce cas, $H = \bigoplus nE_n$.

Théorème

Soit H un espace de Hilbert et $\{E_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels fermés telle que $H = \bigoplus\limits_n E_n$. Soit P_{E_n} la projection orthogonale sur E_n. Alors pour tout $x \in H$ on a :

1. $x = \sum\limits_n P_{E_n}(x)$
2. $\|x\|^2 = \sum\limits_n \|P_{E_n}(x)\|^2$

Démonstration :

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $S_k = \sum\limits_{n=0}^{k} P_{E_n}$. S_k est alors un opérateur linéaire continu sur H. Comme le système $\{P_{E_n}(x)\}_{1\leq n\leq k}$ est orthogonal,on a

$$\|S_k(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{k} \|P_{E_n}(x)\|^2$$

or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\langle x, P_{E_n}(x)\rangle = \|P_{E_n}(x)\|^2$, il s'ensuit que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\langle x, S_k(x)\rangle = \|S_k(x)\|^2$, d'où par Cauchy-Scwarz, $\|S_k(x)\| \leq \|x\|$ i.e. $\|S_k\| \leq 1$. Soit $E = \mathrm{Vect}\,\{E_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in E$ tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon$

Mais $y \in E$, entraîne l'existence de $N \in \mathbb{N}$ et $y_n \in E_n$ tels que $y = \sum\limits_{n=0}^{N} y_n$. Comme les E_n sont deux à deux orthogonaux, on a pour $k \geq m, S_k(y) = y$. On a alors pour $k \geq m$:

$$\|x - S_k(x)\| \leq \|x - y\| + \|y - S_k(y)\| + \|S_k(y) - S_k(x)\| \leq\leq \|x - y\| + 0 + \|x - y\| \leq 2\varepsilon$$

ainsi $\lim_{k\to+\infty} S_k(x) = x$ ce qui démontre 1).

Pour 2), en utilise la continuité du produit scalaire :

$$\|x\|^2 = \lim_{k\to+\infty} \langle x, S_k(x)\rangle = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \|P_{E_n}(x)\|^2 .$$

Définition

Soit H un espace de Hilbert. Une suite orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une **base hilbertienne** si elle est totale i.e. $\left\{\begin{array}{l} \langle x, e_n\rangle = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Rightarrow x = 0\,.$

Remarque

Une suite orthonormée est une base hilbertienne si et seulement si l'application Φ de la remarque 4.5.12 est injective.

Théorème

Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne

(ii) $\forall x \in H, x = \sum\limits_{n\in \mathrm{N}} \langle x, e_n\rangle\, e_n$.

(iii) $\forall x \in H, \|x\|^2 = \sum\limits_{n\in \mathrm{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2$. ($1'$ identité de Parseval)

Démonstration :

Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose $S_k = \sum_{n=0}^{k} P_{E_n} \cdot S_k$ est alors un opérateur linéaire continu sur H. Comme le système $\{P_{E_n}(x)\}_{1\leq n\leq k}$ est orthogonal, on a

$$\|S_k(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{k} \|P_{E_n}(x)\|^2$$

or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} x &= x - P_{E_n}(x) + P_{E_n}(x) \quad x - P_{E_n}(x) \in E_n \text{ et } P_{E_n}(x) \in E_n \\ \langle x, P_{E_n}(x)\rangle &= \langle x - P_{E_n}(x), P_{E_n}(x)\rangle + \langle P_{E_n}(x), P_{E_n}(x)\rangle \\ &= \|P_{E_n}(x)\|^2 \end{aligned}$$

il s'ensuit que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\langle x, S_k(x)\rangle = \|S_k(x)\|^2$, car

$$\begin{aligned} \langle x, S_k(x)\rangle &= \left\langle x, \sum_{n=0}^{k} P_{E_n}(x)\right\rangle \\ &= \langle x, P_{E_0}(x)\rangle + \ldots \langle x, P_{E_k}(x)\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{k} \|P_{E_n}(x)\|^2 = \left\|\sum_{n=0}^{k} P_{E_n}(x)\right\|^2 \\ &\text{(d'après Pythagore)} \end{aligned}$$

donc par Cauchy-Schwarz, $\|S_k(x)\| \leq \|x\|$. Soit $E = \operatorname{Vect}\{E_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in E$ tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Mais $y \in E$, entraîne l'existence de $N \in \mathbf{N}$ et $y_n \in E_n$ tels que $y = \sum_{n=0}^{N} y_n$. Comme les E_n sont deux à deux orthogonaux, on a pour $k \geq m, S_k(y) = y$. On a

Si $k \geq N$:

$$\begin{aligned}
S_k(y) &= \sum_{n=0}^{k} P_{E_n}(y) \\
&= \sum_{n=0}^{k} P_{E_n}(\sum_{i=0}^{N} y_i) + \sum_{n=N+1}^{k} P_{E_n}(\sum_{i=0}^{N} y_i) \\
&= \sum_{n=0}^{N}\sum_{i=0}^{N} + \sum_{n=N+1}^{k} P_{E_n}(i) \sum_{i=0}^{N} P_{E_n}(y_i) \\
&= \sum_{n=0}^{N} P_{E_n}(y_n) + 0
\end{aligned}$$

car si $n \neq i$ alors $y_i \in E_i \perp E_n$ donc $P_{E_n}(y_i) = 0$ et $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$ $y_i \in E_i$ et $P_{E_n}(y_i) = 0$, $\forall n \geq N+1$ $E_n \perp E_i$

D'où

$$S_k(y) = y, \quad \forall k \geq N$$

Proposition

Soit $\{x_i\}_{i \in I}$ un système orthonormé d'un préhilbertien H. Alors

(a) Pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$ on a

$$\left\| \sum_{i \in J} x_i \right\|^2 = \sum_{i \in J} \|x_i\|^2 ;$$

(b) Tout système orthonormé $\{x_i\}_{i \in I}$ est un sytème linéairement indépendant de H, i.e. pour tout $J \subset I$ sous-ensemble fini, $\{x_i\}_{i \in J}$ sont linéairement indépendants.

Une conséquence de cette proposition est, comme une suite orthogonale (ou orthonormée) est un système linéairement indépendant, alors si H contient un système orthogonal infini, H est de dimension infinie. La réciproque est donnée par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Base Hilbertienne

Définition

Soit H un espace préhilbertien. Une base hilbertienne de H est un système orthonormé $\{e_i\}_{i \in I}$ total c-à-d que $H = \overline{\text{vect}\,\{e_i\}_{i \in I}}$.

Remarque

— Si H est un espace de hilbert alors un système orthonormé $\{e_i\}_{i\in I}$ est une base Hilbertienne si et seulement si $\begin{cases} \langle x, e_i\rangle = 0 \\ \text{pour tout } i \in I \end{cases} \Rightarrow x = 0.$

— En effet, si $\langle x, e_i\rangle = 0$, pour tout $i \in I$, alors $x \in \text{vect}\{e_i\}_{i\in I}^{\perp} = \overline{\text{vect}\{e_i\}_{i\in I}}^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$.

Proposition

Soit H un espace préhilbertien et soit $\{f_i\}_{i\in I}$ un système orthogonal dans H. Alors $S = \sum_{a\in I} f_i$ existe si et seulement si $\sum_{i\in I} \|f_i\|^2 < \infty$. On suppose que $\sum_{i\in I} \|f_i\|^2 < \infty$, alors

1. $\|S\|^2 = \sum_{i\in I} \|f_i\|^2$
2. Pour tout $x \in H$, on a $\langle x, S\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, f_i\rangle$.

Corollaire

Soit H un espace préhilbertien et soit $\{e_i\}_{i\in I}$ un système orthonormé dans H. On pose $F = \overline{\text{vect}\{e_i\}_{i\in I}}$ Alors pour tout $x, y \in H$ on a :

1. $P_F x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$
2. $\|P_F x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$
3. $\langle P_F x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \langle e_i, y\rangle$

Démonstration : D'après l'inégalité de Bessel, pour tout $x \in H, \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ et d'après la proposition précédente $Px := \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$ existe dans H, et pour tout $y \in H$ on a

$$\langle Px, y\rangle = \left\langle \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i, y \right\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \langle e_i, y\rangle .$$

En particulier si $y = e_j$, alors $\langle Px, e_j\rangle = \langle x, y\rangle$, i.e. $\langle x - Px, e_j\rangle = 0$, comme $j \in I$ est quelconque, on a pour tout $y \in \text{vect}\{e_i\}_{i\in I}, \langle x - Px, y\rangle = 0$ et par continuité du produit scalaire, $\langle x - Px, y\rangle = 0$ pour tout $y \in F$, d'après le théorème de la projection on a $P = P_F$.

Maintenant, $P_F^2 = P_F$ et P_F auto-adjoint entraînent :

$$\begin{aligned}\|P_F x\|^2 &= \langle P_F x, P_F x\rangle \\ &= \left\langle P_F^2 x, x\right\rangle = \langle P_F x, x\rangle \\ &= \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \langle e_i, x\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle x, e_i\rangle} \\ &= \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2\end{aligned}$$

Théorème

Soit H un espace de Hilbert et $\{e_i\}_{i\in I}$ un système orthonormé. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\{e_i\}_{i\in I}$ est une base hilbertienne.
2. Pour tout $x \in H, x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$
3. Pour tout $x, y \in H$,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \langle e_i, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}$$

4. Pour tout $x \in H, \|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$ (l'identité de Parseval)

Démonstration :

$-(1) \Rightarrow (2)$, D'après le corollaire 4.6.4, appliqué à $F = H$ et donc P_H est égale à l'identité, on aura pour tout $x \in H$: $x = P_H x = \sum_{a\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$
$-(2) \Rightarrow (3)$, conséquence de la proposition précédente $-(3) \Rightarrow (4)$, Il suffit de prendre $y = x$
$-(4) \Rightarrow (1)$, Si $x \in \overline{\text{vect}\,\{e_i\}_{i\in I}}\ \perp$, d'après 4), $\|x\| = 0$, i.e. $x = 0$, ceci entraîne que $\overline{\text{vect}\,\{e_i\}_{i\in I}} = \{0\}$ et donc $\overline{\text{vect}\,\{e_i\}_{i\in I}} = \{0\}^{\perp} = H$.

CHAPITRE 2

OPÉRATEURS BORNÉS SUR LES ESPACES DE HILBERT

2.1 Adjoint d'une application linéaire continue entre espaces de Hilbert

On commence avec la notion d'adjoint ; plusieurs des classes particulières d'opérateurs bornés seront définies à l'aide de cette notion.

Proposition 2.1.1.

Soient E et F des espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on ait :

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

On a de plus $\|T^*\| = \|T\|$.

Preuve :

Étape 1 : Pour tout $y \in F$, considérons l'application $\phi_y : x \longmapsto < T(x), y >$. Montrons que ϕ_y est linéaire continue et qu'il existe un unique $z \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \phi_y(x) = \langle T(x), y\rangle = \langle x, z\rangle$$

D'abord ϕ_y est clairement linéaire par linéarité de T et linéarité à gauche de $<, >$. Puis ϕ_y est continue par continuité de T et l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
En effet, on a :

$$|\phi_y(x)| = | < T(x), y > | \leq \|T(x)\| \times \|y\| \leq \|T\| \times \|x\| \times \|y\|$$

et donc en posant $C = \|T\| \times \|y\|$, on a $|\phi_y(x)| \leq C\|x\| \Longrightarrow \phi_y$ est continue. D'après le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, il existe alors un unique vecteur noté $T^*(y)$ tel que :

$$\forall x \in E, \phi_y(x) = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

Par l'unicité de $T^*(y)$ pour un y donné, on définit une application $T^* : F \longrightarrow E$.

Étape 2 : montrons que T^* est linéaire. Soient $y_1, y_2 \in F$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle x, T^*\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right)\rangle &= \langle T(x), \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\rangle \\
&= \overline{\lambda_1}\langle T(x), y_1\rangle + \overline{\lambda_2}\langle T(x), y_2\rangle \\
&= \overline{\lambda_1}\left\langle x, T^*\left(y_1\right)\right\rangle + \overline{\lambda_2}\langle x, T^*\left(y_2\right)\rangle \\
&= \quad \left\langle x, \lambda_1 T^*\left(y_1\right) + \lambda_2 T^*\left(y_2\right)\right\rangle
\end{aligned}$$

D'où pour tout $x \in E, < x, T^*\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right)\rangle - \left\langle x, \lambda_1 T^*\left(y_1\right) + \lambda_2 T^*\left(y_2\right)\right\rangle = 0$ et finalement :

$$< x, T^*\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right) - \lambda_1 T^*\left(y_1\right) - \lambda_2 T^*\left(y_2\right) >= 0$$

Ainsi, $T^*\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right) - \lambda_1 T^*\left(y_1\right) - \lambda_2 T^*\left(y_2\right) \in E^{\perp} = \{0\}$ et T^* est linéaire.

Étape 3 : Montrons que T^* est continue. Pour $x \in E$ et pour tout $y \in F$, on a :

$$|< x, T^*(y) >| = | < T(x), y > | \leq \|T\| \times \|x\| \times \|y\| (\nabla)$$

Comme $\|\cdot\|$ découle d'un produit scalaire, on a

$$\|T^*(y)\| = \sup_{\|x\|=1} |< x, T^*(y) >|$$

et par (∇) on a

$$\|T^*(y)\| \leq \|T\| \times \|y\|$$

ce qui nous donne T^* est continue et en particulier $\|T^*\| \leq \|T\|$.
En utilisant l'unicité de l'adjoint on montre facilement que : $\left(T^*\right)^* = T$ et ainsi on en déduit que :

$$\|T\| = \|\left(T^*\right)^*\| \leq \|T^*\| \text{ puis } \|T\| = \|T^*\|.$$

Définition

Soient E et F deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. L'unique application linéaire $T^* \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que pour tous $x \in E, y \in F$ on ait

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

est appelée l'adjoint de T.

Regroupons dans la proposition suivante quelques propriétés des adjoints.

Proposition 2.1.2.

Soient E et F des espaces de Hilbert. L'application $T \longmapsto T^*$ est isométrique de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(F,E)$; elle est linéaire si les espaces sont réels et anti-linéaire si les espaces sont complexes. De plus, $\forall T \in \mathcal{L}(E,F), (T^*)^* = T$ et $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Enfin $(TS)^* = S^*T^*$.

Preuve : Par définition du produit scalaire et de l'adjoint, pour tous $x \in E, y \in F, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle x, (T_1+\lambda T_2)^*(y)\rangle &= \langle (T_1+\lambda T_2)(x), y\rangle \\
&= \langle T_1(x), y\rangle + \lambda \langle T_2(x), y\rangle \\
&= \langle x, (T_1)^*(y)\rangle + \left\langle x, \bar{\lambda} T_2^*(y)\right\rangle \\
&= \left\langle x, \left(T_1^* + \bar{\lambda} T_2^*\right)(y)\right\rangle
\end{aligned}$$

Ainsi $T \longmapsto T^*$ est anti-linéaire. Elle est isométrique d'après la proposition 2.1.1. Montrons que $(T^*)^* = T$. Pour cela on montre que pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a $\langle T(x), y\rangle = \langle (T^*)^*(x), y\rangle$. On a

$$\begin{aligned}
\langle T(x), y\rangle &= \langle x, T^*(y)\rangle \\
&= \overline{\langle T^*(y), x\rangle} \\
&= \overline{\langle y, (T^*)^*(x)\rangle} \\
&= \langle (T^*)^*(x), y\rangle .
\end{aligned}$$

Montrons que $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Tout d'abord on rappelle que la norme opérateur est une norme d'algèbre et donc, en particulier, $\|T^*T\| \leq \|T\| \, \|T^*\| = \|T\|^2$.

D'autre part, en utilisant encore une fois de plus un corollaire d'Hahn-Banach et la définition de la norme opérateur, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|T^*T\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|T^*T(x)\| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle T^*T(x), y\rangle| \\
&\geq \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T^*T(x), x\rangle| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T(x), T(x)\rangle| \\
&= \|T\|^2
\end{aligned}$$

On a donc l'égalité $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Enfin, pour vérifier que $(TS)^* = S^*T^*$, il suffit de montrer que pour tous $x \in E$ et $y \in F$ on a $\langle (TS)^*(x), y\rangle = \langle S^*T^*(x), y\rangle$. On a, par défintion de l'adjoint,

$$\begin{aligned}
\langle (TS)^*(x), y\rangle &= \langle x, (TS)(y)\rangle \\
&= \langle T^*(x), S(y)\rangle \\
&= \langle S^*T^*(x), y\rangle
\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tous vecteurs x, y, on a l'égalité $(TS)^* = S^*T^*$. ■

Exemples d'opérateurs et calculs de leur adjoint

1. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable admettant une base orthonormale $(h_n)_n$. Soit $\alpha = (\alpha_n)_n$ une suite bornée de nombres complexes. On définit Δ_α sur $\mathcal{H}$ par

$$\forall c = (c_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}), \Delta_\alpha\left(\sum_{n\geq 0} c_n h_n\right) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n c_n h_n$$

   L'application linéaire Δ_α est dite diagonale car elle admet une représentation matricielle diagonale relativement à la base $(h_n)_n$, avec $(\alpha_n)_n$ sur sa diagonale. On vérifie que Δ_α est continue, de norme $\|\alpha\|_\infty$. De plus $\Delta_\alpha^* = \Delta_{\bar{\alpha}}$, où $\bar{\alpha}$ est la suite des nombres conjugés de la suite α.

2. Soit $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mu)$ et $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Soit M_f définie par

$$M_f(g) = fg$$

   On vérifie que M_f est linéaire, continue, de norme $\|f\|_\infty$ et $M_f^* = M_{\bar{f}}$.

3. Le shift (opérateur de décalage à droite) sur $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ ou $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$ est l'application linéaire définie par $(S(x))_n = x_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{Z}$ avec la convention $x_{-1} = 0$ lorsque $n \in \mathbb{N}$. On vérifie que S est de norme 1 . De plus S^* est défini par $(S^*(y))_n = y_{n+1}$.

En fait $S^* = S^{-1}$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Par contre S n'est pas inversible sur $\ell^2(\mathbb{N})$, il est simplement inversible à droite avec $S^*S = Id$.

Proposition 2.1.4

Soient E et F deux espaces de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

$$F = \ker(T^*) \oplus^\perp \overline{\mathrm{Im}(T)} \text{et } E = \ker(T) \oplus^\perp \overline{\mathrm{Im}\,(T^*)}$$

Preuve : Il suffit de prouver la première assertion, la seconde s'obtenant en échangeant le rôle de T et T^*. On a les équivalences suivantes : $y \in \ker T^* \iff \forall x \in E, \langle T^*(y), x\rangle = 0 \iff \forall x \in E, \langle y, T(x)\rangle = 0 \iff y \perp \mathrm{Im}(T)$ La continuité du produit scalaire (conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), implique que

$$y \perp \mathrm{Im}(T) \iff y \perp \mathrm{Im}(T)^-$$

Ainsi l'orthogonal de $\ker T^*$ est l'adhérence de l'image de T. Donnons également une propriété simple mais utile concernant les sous-espaces invariants.

Proposition 2.1.5

Soient E un espace de Hilbert, G un sous-espace de E et soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors $TG \subset G$ si et seulement si $T^*G^\perp \subset G^\perp$.

Preuve : Supposons d'abord que $TG \subset G$ et montrons que $T^*G^\perp \subset G^\perp$. Soit $x \in G$ et $y \in G^\perp$. Alors

$$\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle = 0,$$

car $Tx \in G$. Ainsi $T^*y \perp x$, pour tout $x \in G$, ce qui montre que $T^*y \in G^\perp$. Pour la réciproque, on peut appliquer le sens qu'on vient de démontrer à T^* et $G^\perp$.

2.2 Opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs, autoadjoints

Définition 2.2.1

Soient E et F deux espaces de Hilbert. Lorsque $E=F, \mathcal{L}(E, F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.

1. Un élément $U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé unitaire si $U^* U=I d_E$ et $U U^*=I d_F$.
2. Un élément $U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé isométrique si $\|U(x)\|=\|x\|$ pour tout $x \in E$.
3. Un élément $N \in \mathcal{L}(E)$ est appelé normal si $N N^*=N^* N$.
4. Un élément $S \in \mathcal{L}(E)$ est appelé hermitien ou auto-adjoint si $S=S^*$.
5. Un élément $P \in \mathcal{L}(E)$ est appelé positif (notation : $P \geq 0$) si P est autoadjoint et si pour tout $x \in E\langle P(x), x\rangle \geq 0$.

Remarque 2.2.2

On verra que dans le cas d'un espace de Hilbert H complexe, un opérateur $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est positif si et seulement si $\langle P x, x\rangle \geq 0$, pour tout $x \in H$. Autrement dit, la condition P autoadjoint dans la définition est superflue si on travaille avec un espace de Hilbert complexe. Mais attention, cela n'est pas le cas si l'espace de Hilbert est réel !

Exemples d'opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs, autoadjoints

1. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un projecteur orthogonal. Notons F son image. Alors P est auto-adjoint. En effet, pour tous $x, x^{\prime} \in F$ et $y, y^{\prime} \in F^{\perp}$,

$$\left\langle P(x+y), x^{\prime}+y^{\prime}\right\rangle=\left\langle x, x^{\prime}\right\rangle=\left\langle x+y, P\left(x^{\prime}+y^{\prime}\right)\right\rangle$$

   De plus $\langle P(x+y), x+y\rangle=\langle x, x\rangle=\|x\|^2 \geq 0$ pour tous $x \in F$ et $y \in F^{\perp}$. Ainsi $P \geq 0$.

2. Les opérateurs diagonaux Δ_α et M_f définis précédemment sont normaux. En effet

$$\Delta_\alpha \Delta_\alpha^*=\Delta_\alpha \Delta_{\bar{\alpha}}=\Delta_\beta=\Delta_{\bar{\alpha}} \Delta_\alpha=\Delta_\alpha^* \Delta_\alpha$$

   où $\beta=\left(\beta_n\right)_n$ est la suite définie par $\beta_n=\left|\alpha_n\right|^2$. D'autre part,

$$M_f M_f^*=M_f M_{\bar{f}}=M_{|f|^2}=M_f^* M_f$$

3. Le shift S sur $\ell^2(\mathbb{N})$ est isométrique, le shift S sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ est unitaire.

4. Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F), T^*T \in \mathcal{L}(E)$ est hermitien car $(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T$ d'après la proposition 1.1.3. De plus $T^*T \geq 0$ car, pour tout $x \in E, \langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$. En particulier $A^2 \geq 0$ dès que $A = A^*$.

Proposition 2.2.3

Soient E et F deux espaces de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Sont équivalents :

1. T est isométrique.
2. $T^*T = Id_E$.

Sont équivalents :

1. T est unitaire.
2. T est surjective et $T^*T = Id_E$.
3. T est une isométrie surjective.

Preuve : Montrons la première équivalence. Supposons que T est isométrique. Montrer que $T^*T = Id_E$ revient à montrer que pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle T^*T(x), y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Rappelons l'identité de polarisation, à savoir,

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle + i\langle u+iv, u+iv\rangle - i\langle u-iv, u-iv\rangle),$$

pour un Hilbert complexe et

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle)$$

pour un Hilbert réel. En utilisant l'une ou l'autre de ces identités et le fait que $\|T(u)\| = \|u\|$, on en déduit :

$$\langle T^*T(x), y\rangle = \langle x, y\rangle$$

Réciproquement, supposons que $T^*T = Id_E$. Ceci implique que pour tout $x \in E$,

$$\langle T^*T(x), x\rangle = \langle x, x\rangle$$

On en déduit immédiatement pour tout $x \in E$,

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2,$$

ce qui prouve que T est bien isométrique. Pour la preuve des trois autres équivalences, les implications 1. implique 2. et 2. implique 3 . sont évidentes. Pour montrer que 3. implique 1 ., on remarque qu'une isométrie linéaire est injective et donc les hypothèses de 3 . impliquent que T^{-1} existe. De plus, T étant une isométrie, on a $T^*T = Id_E$. En composant à droite par T^{-1}, on obtient $T^* = T^{-1}$. ■

Donnons un lemme élémentaire mais utile sur les opérateurs normaux.

Lemme 1.2.4

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur normal. Alors $\ker T = \ker T^*$.

Preuve : Soit $x \in \ker T$. Alors

$$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = 0$$

en utilisant pour la troisième égalité le fait que T est normal donc $TT^* = T^*T$. Ceci prouve donc que $\ker\, T \subset \ker T^*$. Maintenant remarquons que si T est normal, alors T^* est normal et en appliquant l'inclusion qu'on vient de démontrer à T^*, on obtient $\ker T^* \subset \ker T^{**} = \ker T$, car $T^{**} = T$. Finalement $\ker T = \ker T^*$.

Corollaire

A) Pour T dans $B(H)$, H hilbert complexe, alors

1) T est autoadjoint ssi $< Tx, x >$ appartient à $\mathbb{R}$ pour tout $x \in H$.

2) $T = 0$ ssi $< Tx, x >= 0$ pour tout x dans H.

B) Si H est réel, T dans $B(H)$ alors $T = 0$ ssi T autoadjoint et $< Tx, x >= 0$ pour tout x dans H.

Démonstration :

A) 1) $\Rightarrow$) On suppose que T est autoadjoint

Soit $x \in H$, on a

$$< Tx, x >=< x, T^*x >=< x, Tx >= \overline{< Tx, x >}$$

donc $< Tx, x >\in \mathbb{R}$.

$\Leftarrow$) On suppose $< Tx, x >\in \mathbb{R}\ \forall x \in H$

Soient $x, y \in H$, par hypothèse on a :

$$< T(x + iy), x + iy >\in \mathbb{R}$$

D'où $< Tx, x > + < Ty, y > +(< Ty, x > - < Tx, y >) \in \mathbb{R}$

Or $< Tx, x >$ et $< Ty, y > \in \mathbb{R}$, donc $i(< Ty, x > - < Tx, y >) \in \mathbb{R}$

D'où $\mathrm{Re}(< Ty, x > - < Tx, y >) = 0$, donc $\mathrm{Re}(< Ty, x >) = \mathrm{Re}(< Tx, y >)$

D'où

$$\mathrm{Re}(< Tx, y >) = \mathrm{Re}(< Ty, x >) = \mathrm{Re}(\overline{< Ty, x >}) = \mathrm{Re}(< x, Ty >) = \mathrm{Re}(< T^* x, y >)$$

On a aussi $< T(x + y), x + y > \in \mathbb{R}$,

donc $< Tx, x > + < Ty, y > + < Tx, y > + < Ty, x > \in \mathbb{R}$

Comme $< Tx, x >, < Ty, y > \in \mathbb{R}$, donc $< Tx, y > + < Ty, x > \in \mathbb{R}$

d'où $\mathrm{Im}\,(< Tx, y > + < Ty, x >) = 0$

donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,(< Tx, y >) &= - \mathrm{Im}\,(< Ty, x >) \\ &= \mathrm{Im}\left(\overline{< Ty, x >}\right) \\ &= \mathrm{Im}\,(< x, Ty >) \\ &= \mathrm{Im}\,(< T^* x, y >) \end{aligned}$$

Par conséquent $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad < Tx, y > = < T^* x, y >$, donc $T = T^*$

2) Supposons que $T = 0$ et montrons que $< Tx, x > = 0 \ \forall x \in H$

$T = 0$ implique $< Tx, x > = 0 \ \forall x \in H$

Supposons que $< Tx, x > = 0 \ \forall x \in H$ et montrons que $T = 0$ on a

$$< T(x + y), x + y > = 0 \qquad (1) \text{ et } \ < T(x + iy), x + iy > = 0 \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) \qquad & \Longrightarrow < Tx, x > + < Ty, y > + < Tx, y > + < Ty, x > = 0 \\ & \Longrightarrow < Tx, y > + < Ty, x > = 0 \\ (2) \qquad & \Longrightarrow < Tx, x > - < Ty, y > + i(< Ty, x > - < Tx, y >) = 0 \\ & \Longrightarrow < Ty, x > - < Tx, y > = 0 \end{aligned}$$

(car d'après l'hypothèse $< Tx, x > = < Ty, y > = 0$)

$$(1) \text{ et } (2) \Longrightarrow < Ty, x > + < Ty, x > = 0$$

Pour $x = Ty$ on a $< Ty, Ty > = 0$ donc $Ty = 0 \ \forall y \in H$, d'où $T = 0$

B) $\Leftarrow$) Si $< Tx, x > = 0 \ \forall x \in H$ et T est auto-adjoint, alors $< T(x + y), x + y > = 0$ $\forall x, y \in H$

donc $< Tx, x > + < Ty, y > + < Tx, y > + < Ty, x > = 0$,

alors $< Tx, y > + < x, Ty > = 0$

donc $< Tx, y > + < T^*x, y >= 0 \Rightarrow < Tx, y > + < Tx, y >= 0 \Rightarrow 2 < Tx, y >= 0$
$\Rightarrow < Tx, y >= 0 \ \forall x, y \in H \Rightarrow T = 0$

CONCLUSION

On a étudié les espaces de hilbert et leurs propriétés ainsi que les opérateurs agissant sur ces espaces.

Est-ce qu'on peut trouver un autre espace qui généralise l'espace de Hilbert dans lequel l'une des propriétés des espaces de Hilbert reste valable ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Raphael Danchin** Cours de topologie et analyse fonctionnelle, Master première année (2009-2010)

[2] **Emmanuel Fricain** Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs (2009-2010)