

FILIERE :SCIENCES MATHÉMATIQUES& APPLICATIONS

MODULE : PROJET DE FIN D'ETUDES

COORDONNATEUR: Youssef EL FOUTAYENI

PROJET DE FIN D'ÉTUDE

**Le repère de Darboux d'une surface
régulière.**

Réalisé par : FARESS Doha

Présenté et soutenu devant le jury composé de :

<i>Pr.</i> IZID Malika	Encadrante
<i>Pr.</i> OUAZZANI Amina	<i>Présidente</i>
<i>Pr.</i> AHARMIM Bouchra	<i>Examinatrice</i>

2021 -2022

Remerciements

Ce n'est pas parce que la tradition l'exige ou par habitude que cette page est présentée dans les rapports mais parce que les personnes auxquelles s'adressent mes remerciements les méritent vraiment.

J'exprime ma vive reconnaissance à Mme IZID MALIKA et Mme OUZZANI ANNA pour avoir mis à ma disposition les informations nécessaires pour mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier le corps enseignant de la Faculté des sciences Ben M'sik, et plus particulièrement au département de Mathématiques pour ses orientations, ses précieux conseils, ses encouragements et ses efforts déployés pour que ce travail puisse voir le jour.

Mes vifs remerciements vont à toute personne qui a apporté une quelconque aide aussi petite soit-elle, qu'elle trouve ici l'expression de ma reconnaissance la plus chaleureuse.

Le repère de Darboux d'une surface régulière.

Réalisé par : FARESS Doha

21 Juin 2022

Table des matières

Introduction	v
1 Etude affine des surfaces de \mathbb{R}^3	1
1.1 Nappe Géométrique	1
1.2 Nappes orientées	2
1.3 Support d'une nappe	4
1.4 Nappes régulières	4
1.5 Exemple : paramétrisation cartésienne	5
1.6 Plan tangent	7
2 Le Repère de Darboux	11
2.1 Normale orientée	11
2.2 définitions de repère de Darboux	12
2.3 les formules de Darboux	12
2.4 Lien entre le repère de Darboux et le repère de Frenet	14
3 Les exemples d'application	17
3.1 Exemple 1	17
3.2 Exemple 2	20
3.3 Exemple 3	24
Conclusion	29
Bibliographie	31

Introduction

La géométrie différentielle classique est l'étude des courbes ou des surfaces plongées dans un espace euclidien de dimension deux ou trois. Elle constitue une grande partie de la géométrie différentielle dite extrinsèque, opposée au point de vue intrinsèque qui ne présume pas de l'existence d'une structure englobante de dimension supérieure à celle des objets d'étude.

Dans cette branche de la géométrie, on s'attache tout particulièrement à définir des quantités locales ou globales des courbes et des surfaces. Parmi les sujets importants de la géométrie différentielle classique, on trouve le repère de Darboux d'une surface régulière qui est notre sujet de rapport. Ce dernier est un repère mobile utile pour l'étude des courbes tracées sur une surface de l'espace euclidien orienté à trois dimensions, il permet de définir la courbure normale, la courbure géodésique et la torsion géodésique.

Ce travail est composé de trois chapitres :

- Le premier chapitre porte sur l'étude affine des surfaces de \mathbb{R}^3 , on donne des rappels sur lesquels notre travail se base.
- Le deuxième chapitre est consacré au repère de Darboux en donnant sa définition et en détaillant la notion de courbure de normale, de courbure géodésique, et la torsion géodésique, puis la relation entre le repère de Darboux et Frenet.
- Le troisième chapitre consiste à donner des exemples pour illustrer les résultats obtenus.

Chapitre 1

Etude affine des surfaces de \mathbb{R}^3

1.1 Nappe Géométrique

Dans ce chapitre, nous allons définir la notion de la nappe géométrique, c'est l'analogie, en dimension supérieure de la notion de l'arc géométrique.

Définition 1 On appelle nappe paramétrée de classe C^k ($k \geq 1$) de \mathbb{R}^3 , tout couple (D, F) où D est un domaine de \mathbb{R}^2 et $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application de classe C^k .

On rappelle qu'un domaine de \mathbb{R}^2 est une partie ouverte et connexe de \mathbb{R}^2 .

Définition 2 Soient D, Δ deux domaines de \mathbb{R}^2 , soit $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $G : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux nappes paramétrées de classe C^k de \mathbb{R}^3 ($k \geq 1$). On dit que (D, F) et (Δ, G) sont dites C^k -équivalentes; s'il existe un difféomorphisme de classe C^k

$$\theta : \Delta \rightarrow D$$

tel que

$$G = F \circ \theta$$

On rappelle qu'un difféomorphisme de classe C^k de Δ sur D est une bijection de Δ sur D de classe C^k ainsi que sa réciproque.

On a aussi le résultat suivant : pour qu'une bijection $\theta : \Delta \rightarrow D$ soit un difféomorphisme de classe C^k ($k \geq 1$), il suffit que θ soit de classe C^k et le jacobien de θ ne s'annule en aucun point de Δ .

Remarque 3 1. La relation $\ll (D, F)$ et (Δ, G) sont C^k -équivalentes \gg est une relation d'équivalence.

2. Deux nappes (D, F) et (Δ, G) C^k -équivalentes ont même image ($F(D) = G(\Delta)$).

Définition 4 1 Une nappe géométrique Σ de classe C^k de \mathbb{R}^3 est une classe d'équivalence de nappes paramétrées de classe C^k de \mathbb{R}^3 .

2 Les nappes paramétrées constituant Σ sont appelées **les paramétrisations admissibles** de Σ . Si (D, F) est une paramétrisation de Σ , tout difféomorphisme $\theta : \Delta \rightarrow D$ est un changement de paramètre admissible sur Σ .

3 L'image commune des paramétrisations de la nappe Σ est appelée le support de Σ et notée $\text{supp}(\Sigma)$.

Définition 5 Soit Σ une nappe géométrique de classe C^k définie par une paramétrisation (D, F) . On appelle sous-nappe de Σ , toute nappe géométrique Σ_U définie par la restriction de F à un domaine U contenu dans D .

1.2 Nappes orientées

Soient Δ et D deux domaines de \mathbb{R}^2 et soit

$$\begin{aligned} \theta : \Delta &\rightarrow D \\ (u, v) &\rightarrow (\theta_1(u, v), \theta_2(u, v)) \end{aligned}$$

un difféomorphisme de classe C^k ($k \geq 1$)

Le jacobien de θ est la fonction numérique définie par

$$J_\theta(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \theta_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \theta_2}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}$$

La fonction J_θ est de classe C^{k-1} ($k \geq 1$), donc continue et $J_\theta \neq 0$ (car θ est un difféomorphisme). Du fait que Δ est connexe, J_θ garde un signe constant sur Δ .

Si $J_\theta > 0$, on dit que le difféomorphisme θ est direct ou conserve l'orientation.

Si $J_\theta < 0$, on dit que le difféomorphisme θ est indirect.

En tenant compte des deux relations :

$$J_{\theta^{-1}}(\theta(u, v)) = \frac{1}{J_\theta(u, v)} \quad \text{et} \quad J_{\theta \circ \varphi}(u, v) = J_\theta(\varphi(u, v)) J_\theta(u, v)$$

On en déduit que la réciproque et la composée de deux difféomorphismes directs sont directes. On obtient alors une relation d'équivalence plus fine en posant la définition :

Définition 6 Deux nappes paramétrées (D, F) et (Δ, G) de classe C^k sont dites positivement C^k -équivalentes s'il existe un difféomorphisme de classe C^k

$$\theta : \Delta \rightarrow D \quad \text{direct}$$

tel que

$$G = F \circ \theta$$

Les classes d'équivalences Σ définies par cette relation d'équivalence sont dites nappes géométriques orientées.

Le choix d'une paramétrisation (D, F) de classe C^k de Σ définit une orientation de la surface Σ de la forme (Δ, G) , avec $G = F \circ \theta$ où $\theta : \Delta \rightarrow D$ est un difféomorphisme direct (resp. indirect) de classe C^k constituant une nappe géométrique Σ_+ (resp. Σ_-).

On notera que, comme dans le cas des arcs géométriques, Σ_+ et Σ_- ne sont pas nécessairement distinctes, en effet il peut exister deux changements de paramètres φ direct et ψ indirect tels que l'on ait

$$F \circ \varphi = F \circ \psi$$

On dit alors que Σ admet une seule orientation.

Lemme 7 Pour qu'une nappe géométrique Σ définie par (D, F) admette une seule orientation, il faut et il suffit qu'il existe un changement de paramètre

$$\theta : D \rightarrow D \quad \text{indirect}$$

tel que

$$F = F \circ \theta$$

Preuve. \implies On suppose que Σ possède une seule orientation, $\Sigma_+ = \Sigma_-$ c-à-d : $\exists \varphi$ direct et $\exists \Psi$ indirect tq $F \circ \varphi = F \circ \Psi$, donc

$$F = F \circ (\Psi \circ \varphi^{-1})$$

On pose $\theta = \Psi \circ \varphi^{-1}$ indirect ($J_\theta = J_{\Psi \circ \varphi^{-1}} = J_\Psi J_{\varphi^{-1}} \prec 0$ ($J_\Psi \prec 0$))

$$F = F \circ \theta, \quad \theta \text{ indirect.}$$

\impliedby On suppose $\exists \theta : \Delta \rightarrow D$ tel que $F = F \circ \theta$, θ indirect, montrons que $\Sigma_+ \subset \Sigma$. Soit $(\Delta, G) \in \Sigma_+$ donc $\exists \theta_1$ direct tel que

$$G = F \circ \theta_1 = F \circ \theta \circ \theta_1 = F \circ (\theta \circ \theta_1)$$

On obtient $G = F \circ \theta_2$, θ_2 indirect d'où $(\Delta, G) \in \Sigma_-$ donc $\Sigma_+ \subset \Sigma$.

De même, on montre que $\Sigma_- \subset \Sigma_+$ d'où $\Sigma_+ = \Sigma_-$ ■

1.3 Support d'une nappe

Soit Σ une nappe de classe C^k , définie par la paramétrisation (D, F) . Si M est un point du $\text{supp}(\Sigma)$, le cardinal de $F^{-1}(M)$ ne dépend pas de la paramétrisation F (car les changements de paramètres sont bijectifs) :

- si $\text{card}(F^{-1}(M)) = 1$, on dit que le point M est simple.
- si $\text{card}(F^{-1}(M)) = p \geq 2$, on dit que le point M est multiple (il est dit double si $p = 2$, triple si $p = 3, \dots$).

Définition 8 Une nappe géométrique est dite simple si tous les points de son support sont simples.

Proposition 9 Toute nappe simple admet deux orientations distinctes.

Preuve. Soit Σ une nappe simple définie par une paramétrisation $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$. Supposons que Σ possède une seule orientation c-à-d qu'il existe

$$\theta : D \rightarrow D$$

tel que

$$F = F \circ \theta \quad \text{et} \quad J_\theta < 0$$

Comme F est injective, on a $\forall (u, v) \in D$

$$\begin{aligned} F(u, v) = F(\theta(u, v)) &\implies \theta(u, v) = (u, v) \\ &\implies \theta = I_d \\ &\implies J_\theta = J_{I_d} > 0 \quad \text{Absurde} \end{aligned}$$

■

1.4 Nappes régulières

Soit Σ une nappe géométrique de classe C^k ($k \geq 1$) définie par une paramétrisation (D, F) . Soient (Δ, G) une autre paramétrisation de Σ et θ est un changement de paramètre tel que :

$$G = F \circ \theta$$

On a pour $\mu \in \Delta$,

$$dG_\mu = dF_{\theta(\mu)} \circ d\theta_\mu$$

Or $d\theta_\mu$ est un isomorphisme de \mathbb{R}^2 , d'où $d\theta_\mu(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. On en déduit que.

$$dG_\mu(\mathbb{R}^2) = dF_{\theta(\mu)}(\mathbb{R}^2), \forall \mu \in \Delta$$

On peut alors poser la définition suivante :

Définition 10 Une nappe géométrique Σ définie par une paramétrisation (D, F) est dite régulière si dF_m est de rang 2 pour tout $m \in D$

Soit Σ une nappe géométrique définie par la paramétrisation

$$\begin{aligned} F : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow F(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v), F_3(u, v)) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} dF_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (h, k) &\rightarrow dF_{(u,v)}(h, k) = \frac{\partial F}{\partial u}(u, v)h + \frac{\partial F}{\partial v}(u, v)k \end{aligned}$$

où

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial F_3}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial F_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial F_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

En utilisant ces notations, on annonce le résultat :

Proposition 11 Pour que la nappe Σ soit régulière, il faut et il suffit que pour tout (u, v) de D , les vecteurs $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(u, v)$ soient linéairement indépendants.

$$\Sigma \text{ régulière} \iff \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \neq 0, \quad \forall (u, v) \in D$$

1.5 Exemple : paramétrisation cartésienne

Définition 12 On appelle paramétrisation cartésienne de classe C^k , toute paramétrisation F de classe C^k définie par

$$\begin{aligned} F : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x = u, y = v, z = f(u, v)) \end{aligned}$$

où D est un domaine de \mathbb{R}^2 et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k

Une nappe Σ définie par une paramétrisation cartésienne F est dite simplement nappe d'équation cartésienne :

$$z = f(x, y)$$

Proposition 13 *Toute nappe géométrique de classe C^k ($k \geq 1$) admettant une paramétrisation cartésienne est simple et régulière.*

Preuve. Soit

$$\begin{aligned} F : \Delta \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

avec

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

- Montrons que Σ est simple :

$$\begin{aligned} F(u_1, v_1) = F(u_2, v_2) &\implies (u_1, v_1, f(u_1, v_1)) = (u_2, v_2, f(u_2, v_2)) \\ &\implies \begin{cases} u_1 &= u_2 \\ v_1 &= v_2 \\ f(u_1, v_1) &= f(u_2, v_2) \end{cases} \\ &\implies F \text{ est injective} \\ &\implies \Sigma \text{ est simple.} \end{aligned}$$

- Montrons que Σ est régulière :

Soit $F(u, v) = (u, v, f(u, v))$, alors

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

or $\left\{ \frac{\partial F}{\partial u}(u, v); \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \right\}, \forall (u, v)$ est libre

donc Σ est régulier.

■

Théorème 14 *Soit Σ une nappe géométrique de classe C^k , $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation de Σ et $m_0 = (u_0, v_0)$ un point de D tel que dF_{m_0} est de rang 2. Alors il existe un domaine $D_0 \subset D$ et $m_0 \in D_0$ tel que la sous nappe Σ_0 définie par la restriction de F à D_0 admette une paramétrisation cartésienne (d'où il résulte que Σ_0 est simple et régulière).*

Preuve. Désignons par f, g, h les coordonnées de F dans un repère affine arbitrairement donné $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathbb{R}^3 . ■

Par hypothèse, la matrice

$$\begin{pmatrix} f'_u(u_0, v_0) & g'_u(u_0, v_0) & h'_u(u_0, v_0) \\ f'_v(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0) & h'_v(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

est de *rang* 2. En permutant les coordonnées, nous pouvons donc supposer que le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} f'_u & g'_u \\ f'_v & g'_v \end{vmatrix} (u_0, v_0) \neq 0.$$

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert $D_0 \subset D$ et $m_0 = (u_0, v_0) \in D_0$ tel que ,

$$\begin{aligned} \theta_{/D_0} : D_0 &\rightarrow \theta(D_0) = D_0 \\ (u, v) &\mapsto (f(u, v), g(u, v)) = (x, y) \end{aligned}$$

est un C^k difféomorphisme.

On peut évidemment supposer D_0 connexe, auquel cas $D_0 = \theta(D_0)$ est connexe.

Soit alors Σ_0 la nappe définie par la restriction de F à D_0 ; l'application $G = F \circ \theta^{-1} : D_0 \mapsto \mathbb{R}^2$ où $F = F_{/D_0}$ est une paramétrisation admissible de Σ_0 et cartésienne.

En notant

$$\begin{aligned} \theta_{/D_0} = \theta : D_0 &\rightarrow D_0 \\ (u, v) &\rightarrow (x, y) = (f(u, v), g(u, v)) \end{aligned}$$

on obtient,

$$\begin{aligned} G(x, y) &= F_{/D_0} \circ \theta_{/D_0}^{-1} \\ &= (f(\theta^{-1}(x, y)), g(\theta^{-1}(x, y)), h(\theta^{-1}(x, y))) \\ &= (x, y, (h \circ \theta^{-1})(x, y)). \end{aligned}$$

1.6 Plan tangent

Désignons par $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $G : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux paramétrisations d'une même nappe Σ et $\theta : \Delta \rightarrow D$ un changement de paramètre tel que

$$G = F \circ \theta$$

Soit M un point simple de Σ , donc

$$\begin{aligned} \exists! m \in D &/ M = F(m) \\ \exists! \mu \in \Delta &/ M = G(\mu) = F(\theta(\mu)) \end{aligned}$$

D'où $\theta(\mu) = m$, et en appliquant la différentielle, on obtient

$$dG_\mu = dF_{\theta(\mu)} \circ d\theta_\mu$$

Comme θ est un difféomorphisme, on a $d\theta_\mu$ est une bijection de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 , et par suite les applications linéaires dG_μ et $d\theta_\mu$ ont la même image :

$$dG_\mu(\mathbb{R}^2) = dF_m(\mathbb{R}^2)$$

On pose alors les définitions :

Définition 15 Soit Σ une nappe géométrique définie par une paramétrisation (D, F) et $M = F(m)$ un point simple de Σ .

1. On dit que M est stationnaire si dF_m est de rang ≤ 1 .
2. On dit que M est régulier si dF_m est de rang 2, et dans ce cas, l'espace vectoriel $T_M = \text{Im}(dF_m)$ est appelé le plan vectoriel tangent de Σ en $M = F(m)$.

Le plan affine \mathbb{T}_M passant par M et de direction T_M est appelé le plan tangent de Σ en M .

Soit Σ une nappe géométrique définie par la paramétrisation :

$$\begin{aligned} F : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow F(u, v) \end{aligned}$$

Soit $M_0 = F(u_0, v_0)$ un point simple et régulier de Σ et $T_{M_0} = dF_{(u_0, v_0)}(\mathbb{R}^2)$ le plan vectoriel tangent à Σ . On a :

$$dF_{(u_0, v_0)}(\lambda, \mu) = \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0)\lambda + \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0)\mu.$$

Le point M_0 étant régulier donc $\dim(T_{M_0}) = 2$ et par suite les deux vecteurs $\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0)$ sont linéairement indépendants.

Le plan tangent T_{M_0} admet la paramétrisation définie sur \mathbb{R}^2 par

$$(\lambda, \mu) \rightarrow M_0 + \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0)\lambda + \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0)\mu.$$

Posons

$$F(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v)).$$

Le plan tangent admet l'équation cartésienne :

$$\begin{vmatrix} x - f(u_0, v_0) & y - g(u_0, v_0) & z - h(u_0, v_0) \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Cas particulier où Σ est définie par une paramétrisation cartésienne :

$$F : (x, y) \rightarrow (x, y, f(x, y)).$$

Le plan tangent à Σ au point de coordonnées $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ admet l'équation cartésienne

$$z - f(x_0, y_0) = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Chapitre 2

Le Repère de Darboux

2.1 Normale orientée

Soit Σ une nappe simple de classe C^k ($k \geq 1$) définie par la paramétrisation

$$\begin{aligned} X : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow X(u, v) \end{aligned}$$

Pour $(u, v) \in D$, on pose

$$\overrightarrow{N}(u, v) = \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}$$

Désignons par

$$\begin{aligned} \theta : D_1 &\rightarrow D \\ (u_1, v_1) &\rightarrow (u, v) \end{aligned}$$

un difféomorphisme défini sur un domaine D_1 de \mathbb{R}^2 dans D et posons

$$X_1 = X \circ \theta$$

une nouvelle paramétrisation de Σ . On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N}_1(u_1, v_1) &= \frac{\partial X_1}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X_1}{\partial v_1} \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u_1} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u_1} \right) \wedge \left(\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v_1} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial v_1} \right) \\ &= J_\theta(u_1, v_1) \overrightarrow{N}(u, v) \end{aligned}$$

Il en résulte que le vecteur unitaire

$$\vec{h}(u, v) = \frac{\vec{N}(u, v)}{\|\vec{N}(u, v)\|}$$

reste invariant dans tout changement de paramètres de jacobien positif. Le vecteur $\vec{h}(u, v)$ ne dépend que de l'orientation de Σ définie par la paramétrisation choisie, et il se change en son opposé si on change l'orientation de Σ en son opposée.

Le vecteur $\vec{h}(u, v)$ est appelé vecteur normal en $M = X(u, v)$ à la nappe orientée Σ .

2.2 définitions de repère de Darboux

Définition 16 1. Soient M un point régulier de Σ et $\vec{\tau} \in T_M$ un vecteur tangent en M à Σ . On appelle repère de Darboux associé au couple $(M, \vec{\tau})$, le repère orthonormal direct

$$(M, \vec{\tau}, \vec{g}, \vec{h})$$

d'origine M défini par

$$\begin{aligned} \vec{h} &= \vec{h}_M && \text{le vecteur unitaire normal en } M \text{ à } \Sigma \\ \vec{g} &= \vec{h} \wedge \vec{\tau}. \end{aligned}$$

2. Soit γ un arc régulier et orienté de classe C^p ($1 \leq p \leq k$) tracé sur Σ et $s \rightarrow P(s)$ une paramétrisation normale de γ . On appelle repère de Darboux de γ , le repère

$$(P(s), \vec{\tau}(s), \vec{g}(s), \vec{h}(s))$$

associé au couple $(P(s), \vec{\tau}(s))$ où $\vec{\tau}(s) = \frac{dP}{ds}$ est le vecteur tangent à γ .

2.3 les formules de Darboux

Désignons toujours par γ un arc régulier et orienté de classe C^p avec $p \geq 2$ tracé sur Σ et $s \rightarrow P(s)$ une paramétrisation normale de γ . Les fonctions $\vec{\tau}$, \vec{g} et \vec{h} sont de classe C^{p-1} et par suite dérivables.

En dérivant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{\tau}^2(s) &= \vec{g}^2(s) = \vec{h}^2(s) = 1 \\ \vec{g}(s) \cdot \vec{h}(s) &= \vec{h}(s) \cdot \vec{\tau}(s) = \vec{\tau}(s) \cdot \vec{g}(s) = 0 \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} &= \vec{g} \cdot \frac{d\vec{g}}{ds} = \vec{h} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds} = 0 \\ \vec{g} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds} + \vec{h} \cdot \frac{d\vec{g}}{ds} &= \vec{h} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} + \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds} = \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{g}}{ds} + \vec{g} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0 \end{aligned}$$

D'où les définitions :

1. La courbure normale de γ : la fonction ρ_n définie par

$$\rho_n(s) = \vec{h} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = -\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds}.$$

2. La courbure géodésique de γ : la fonction ρ_g définie par

$$\rho_g(s) = \vec{g} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = -\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{g}}{ds}.$$

3. La torsion géodésique de γ : la fonction θ_g définie par

$$\theta_g(s) = \vec{g} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds} = -\vec{h} \cdot \frac{d\vec{g}}{ds}.$$

On a alors les formules de Darboux :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho_g \vec{g} + \rho_n \vec{h} \\ \frac{d\vec{g}}{ds} = -\rho_g \vec{\tau} - \theta_g \vec{h} \\ \frac{d\vec{h}}{ds} = -\rho_n \vec{\tau} + \theta_g \vec{g} \end{cases}$$

Remarque 17 1 Cas d'un point d'inflexion :

Si le point $M = P(s)$ est un point d'inflexion de γ (ie $P''(s) = 0$), on a :
 $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = P''(s) = 0$, d'où $\rho_n(s) = \rho_g(s) = 0$. La courbure normale et la courbure géodésique sont nulles en un point d'inflexion.

2 Propriété fondamentale de ρ_n et θ_g :

Supposons que l'arc γ soit défini par la donnée des fonctions : $s \rightarrow u(s)$ et $s \rightarrow v(s)$ de sorte que $P(s) = M(u(s), v(s))$. On a

$$\vec{\tau}(s) = \frac{\partial M}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{dv}{ds} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{h}}{ds}(s) = \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} \frac{du}{ds} + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \frac{dv}{ds} \quad (2)$$

La donnée du vecteur tangent $\vec{\tau}(s)$ détermine les nombres $\frac{du}{ds}$ et $\frac{dv}{ds}$

dans la relation (1) et la relation (2) détermine $\frac{d\vec{h}}{ds}$ (puisque les vec-

teurs $\frac{\partial M}{\partial u}$, $\frac{\partial M}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}$ ne dépendent que du point $P(s) = M(u(s), v(s))$)

Les relations

$$\rho_n = -\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds} \quad \text{et} \quad \theta_g = \vec{g} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds}$$

montrent alors que les nombres $\rho_n(s)$ et $\theta_g(s)$ sont déterminés par la donnée du point $M(s)$ et du vecteur $\vec{\tau}(s)$, d'où le résultat.

(La courbure normale ρ_n et la torsion géodésique θ_g en un point M d'un arc régulier tracé sur Σ ne dépendent que du point M et de la tangente à γ en M). On montre par contre que la courbure géodésique d'un arc γ passant par M dépend effectivement des dérivées secondes des fonctions u et v définissant l'arc.

2.4 Lien entre le repère de Darboux et le repère de Frenet

Soit Σ une nappe de classe C^k ($k \geq 3$) et γ un arc tracé sur Σ de classe C^p avec $3 \leq p \leq k$, régulier et sans point d'inflexion. On note par $(\vec{\tau}, \vec{v}; \vec{\beta})$, le repère de Frenet de γ associé à la paramétrisation normale $s \rightarrow P(s)$, ρ et θ la courbure et la torsion correspondantes. Le vecteur unitaire normal \vec{h} appartient au plan engendré par \vec{v} et $\vec{\beta}$, il s'écrit :

$$\vec{h} = \cos \alpha \vec{v} + \sin \alpha \vec{\beta}$$

où α est l'angle du vecteur \vec{h} avec le vecteur \vec{v} dans le plan orienté $(\vec{v}, \vec{\beta})$.

On a,

$$\vec{g} = \vec{h} \wedge \vec{\tau} = \sin \alpha \vec{v} - \cos \alpha \vec{\beta}$$

2.4. LIEN ENTRE LE REPÈRE DE DARBOUX ET LE REPÈRE DE FRENET 15

d'où les expressions de \vec{v} et $\vec{\beta}$ dans la base $\{\vec{g}, \vec{h}\}$:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \sin \alpha \vec{g} + \cos \alpha \vec{h} \\ \vec{\beta} &= -\cos \alpha \vec{g} + \sin \alpha \vec{h}\end{aligned}$$

En utilisant les formules de Frenet

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho(s) \vec{v}(s) \\ \frac{d\vec{v}}{ds} = -\rho(s) \vec{\tau}(s) - \theta(s) \vec{\beta}(s) \\ \frac{d\vec{\beta}}{ds} = \theta(s) \vec{v}(s) \end{cases}$$

on cherche à exprimer $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ et $\frac{d\vec{g}}{ds}$ dans le repère de Darboux. On a

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho(s) \vec{v}(s) = \rho(s) (\sin \alpha \vec{g} + \cos \alpha \vec{h}).$$

et

$$\begin{cases} \frac{d\vec{g}}{ds} = \frac{d}{ds} (\sin \alpha \vec{v} - \cos \alpha \vec{\beta}) \\ = -\rho(s) \sin \alpha \vec{\tau}(s) + \left(\cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} - \cos \alpha \theta(s) \right) \vec{v}(s) \\ + (-\theta(s) \sin \alpha + \sin \alpha \frac{d\alpha}{ds}) \vec{\beta}. \end{cases}$$

En remplaçant \vec{v} et $\vec{\beta}$ par leurs expressions respectives en fonction de \vec{g} et \vec{h} , on obtient

$$\frac{d\vec{g}}{ds} = -\rho(s) \sin \alpha \vec{\tau}(s) - \left(\theta - \frac{d\alpha}{ds} \right) \vec{h}(s)$$

On peut alors en déduire l'expression de $\frac{d\vec{h}}{ds}$, d'où le système :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho \sin \alpha \vec{g} + \rho \cos \alpha \vec{h} \\ \frac{d\vec{g}}{ds} = \rho \sin \alpha \vec{\tau} - \left(\theta - \frac{d\alpha}{ds} \right) \vec{h} \\ \frac{d\vec{h}}{ds} = -\rho \cos \alpha \vec{\tau} + \left(\theta - \frac{d\alpha}{ds} \right) \vec{g} \end{cases}$$

Moyennant les formules de Darboux, il vient :

$$\begin{cases} \rho_g &= \rho \sin \alpha, \\ \rho_n &= \rho \cos \alpha, \\ \theta_g &= \theta - \frac{d\alpha}{ds} \end{cases}$$

Remarque 18 1. On notera que les formules :

$$\rho_g = \rho \sin \alpha \quad \text{et} \quad \rho_n = \rho \cos \alpha$$

restent vraies même si le point M est un point d'inflexion, en effet, dans ce cas, on aura $\rho_g = \rho_n = \rho = 0$.

2. *Interprétation géométrique de la courbure normale :*

Si L est une droite tangente en M à Σ et si P est un plan perpendiculaire au plan T_M contenant L , alors l'intersection $\Sigma \cap P$ est un arc simple et régulier γ . Si on désigne par $s \rightarrow P(s)$ une paramétrisation normale de γ et $M = P(s)$, alors l'angle $\alpha(s) = 0 \pmod{\pi}$, c'est à dire $\alpha = 0$ ou bien $\alpha = \pi$ et par suite $\rho_n = \pm\rho$. On conclut :

↳ la valeur absolue de la courbure normale relative à une tangente donnée L en un point M de Σ est égale à la courbure en M de la section de Σ par le plan normal à Σ contenant L .

Chapitre 3

Les exemples d'application

Maintenant, comme application de nos principaux résultats, nous donnons les exemples suivants :

3.1 Exemple 1

Soit M la surface définie par la paramétrisation :

$$\varphi(s, v) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}} \right)$$

- Calculons :

1 Le vecteur tangent $\vec{\tau}$:

On a :

$$\vec{\tau}(s) = \frac{d\varphi}{ds} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

2 Le vecteur normal \vec{h} :

On a :

$$\vec{h} = \frac{\vec{N}(s, v)}{\|\vec{N}(s, v)\|}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \vec{N}(s, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{v}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{v}{2\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{v}{2\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ -\frac{v}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

et

$$\|\vec{N}(s, v)\| = \sqrt{\frac{v^2}{8} \sin^2 \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{v^2}{8} \cos^2 \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{v^2}{8}} = \frac{v}{2}$$

Donc

$$\vec{h}(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

3 Le vecteur normal géodésique \vec{g} :

On a :

$$\begin{aligned}
 \vec{g}(s) &= \vec{h} \wedge \vec{\tau} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Donc

$$\vec{g}(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

- calculons :

1 La courbure normale $\rho_n(s)$:

On a :

$$\begin{aligned} \rho_n(s) &= \vec{h} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

D'où

$$\rho_n(s) = 0$$

2 La courbure géodésique $\rho_g(s)$:

On a :

$$\begin{aligned} \rho_g(s) &= \vec{g} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \\ &= \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \cos^2 \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{s}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

D'où

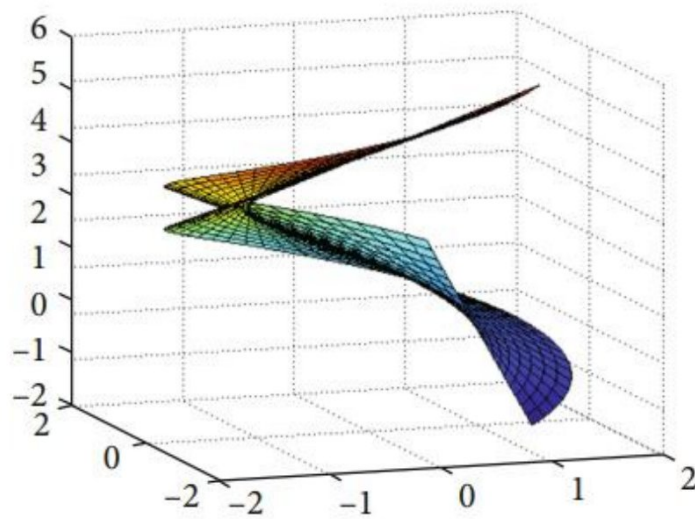
$$\rho_g = -\frac{1}{2}$$

3 La torsion géodésique $\theta_g(s)$:

$$\begin{aligned}\theta_g(s) &= \vec{g} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds} \\ &= \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{s}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

D'où

$$\theta_g = \frac{1}{2}$$



La Figure 1 : La surface 1M

3.2 Exemple 2

Soit M la surface définie par la paramétrisation suivante :

$$\varphi(s, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{s}{\sqrt{2}} - 2v \right)$$

- Calculons :

1 Le vecteur tangent $\vec{\tau}(s)$:

On a :

$$\vec{\tau}(s) = \frac{d\varphi}{ds} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

2 Le vecteur normal $\vec{h}(s)$:

On a :

$$\vec{h}(s) = \frac{\vec{N}(s, v)}{\|\vec{N}(s, v)\|}$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{N}(s, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \cos s \\ -\sqrt{2} \sin s \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\|\vec{N}(s, v)\| = \sqrt{2 \cos^2 s + 2 \sin^2 s} = \sqrt{2}$$

D'où

$$\vec{h}(s) = (-\cos s, -\sin s, 0)$$

3 Le vecteur normal géodésique $\vec{g}(s)$:

On a :

$$\begin{aligned}\vec{g}(s) &= \vec{h} \wedge \vec{\tau} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos s \\ -\sin s \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'où

$$\vec{g}(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

- Calculons :

1 La courbure normale $\rho_n(s)$:

On a :

$$\begin{aligned}\rho_n(s) &= \vec{h} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \\ &= (-\cos s, -\sin s, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 s + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 s\end{aligned}$$

D'où

$$\rho_n(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2 La courbure géodésique $\rho_g(s)$:

On a :

$$\begin{aligned}
 \rho_g(s) &= \vec{g} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \\
 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \cos s \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \sin s \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \cos s \sin s - \frac{1}{2} \cos s \sin s
 \end{aligned}$$

D'où

$$\rho_g(s) = 0$$

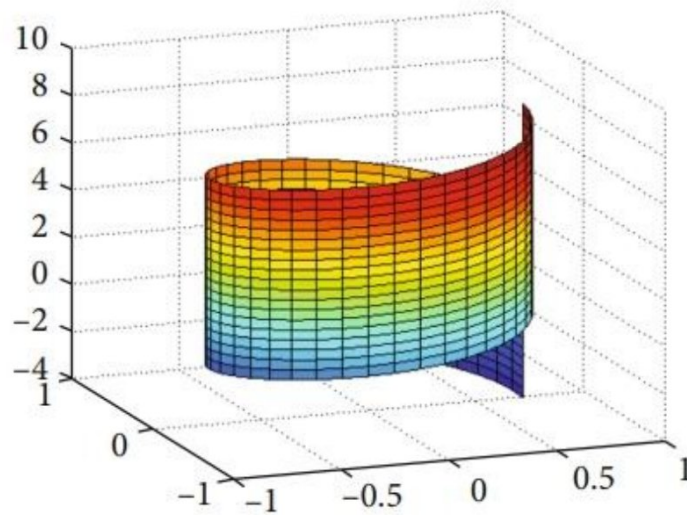
3 La torsion géodésique $\theta_g(s)$:

On a :

$$\begin{aligned}
 \theta_g(s) &= \vec{g} \frac{d\vec{\tau}}{ds} \\
 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} \sin s \\ -\cos s \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 s + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 s
 \end{aligned}$$

D'où

$$\theta_g(s) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Figure 2 : La surface²M

3.3 Exemple 3

Soit M une surface définie par la paramétrisation suivante :

$$\varphi(s, v) = \left(\cos s - \frac{v}{\sqrt{2}} \cos s, \sin s - \frac{v}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{v}{\sqrt{2}} \right)$$

- Calculons :

1 Le vecteur tangent $\vec{\tau}(s)$:

On a :

$$\vec{\tau}(s) = \frac{d\varphi}{ds} = (-\sin s, \cos s, 0)$$

2 Le vecteur normal $\vec{h}(s)$:

On a :

$$\vec{h}(s) = \frac{\vec{N}(s, v)}{\|\vec{N}(s, v)\|}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \vec{N}(s, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\
 &= \begin{pmatrix} -\sin s + \frac{v}{\sqrt{2}} \sin s \\ \cos s - \frac{v}{\sqrt{2}} \cos s \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-v}{2} \cos s \\ \frac{\sqrt{2}-v}{2} \sin s \\ \frac{\sqrt{2}-v}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

et

$$\|\vec{N}(s, v)\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-v}{2}\right)^2 (\cos^2 s + \sin^2 s + 1)} = \frac{\sqrt{2}-v}{\sqrt{2}}$$

Donc

$$\vec{h}(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

3 Le vecteur normal géodésique $\vec{g}(s)$:

On a :

$$\begin{aligned}
 \vec{g} &= \vec{h} \wedge \vec{\tau} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Donc

$$\vec{g}(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- Calculons :

1 La courbure normale $\rho_n(s)$:

$$\begin{aligned}\rho_n(s) &= \vec{h} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} -\cos s \\ -\sin s \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 s - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 s + 0\end{aligned}$$

D'où

$$\rho_n(s) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2 la courbure géodésique $\rho_g(s)$:

$$\begin{aligned}\rho_g(s) &= \vec{g} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} -\cos s \\ -\sin s \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 s + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 s + 0\end{aligned}$$

D'où

$$\rho_g(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

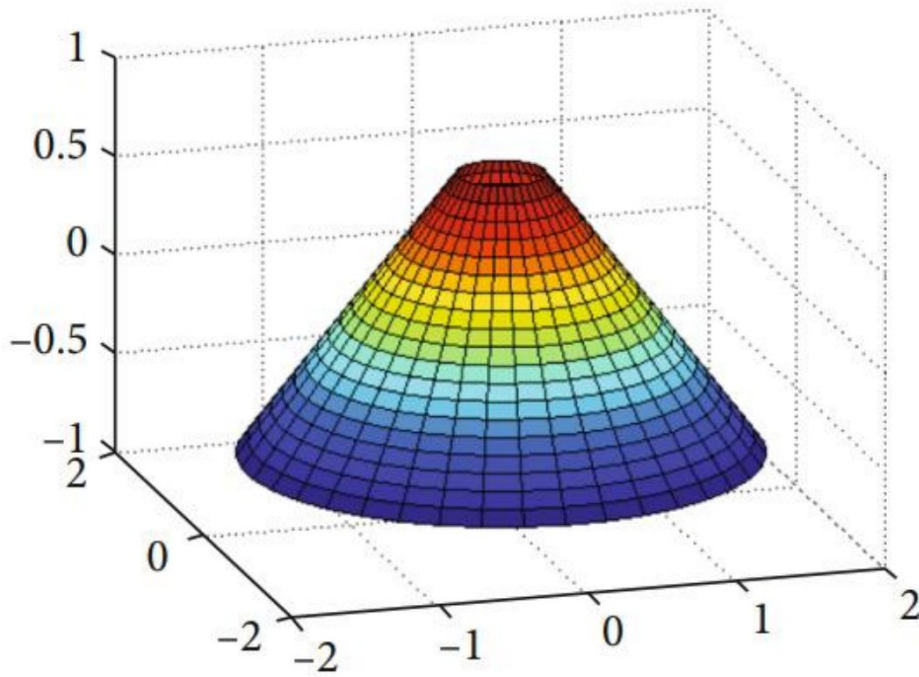
3 La torsion géodésique $\theta_g(s)$:

On a :

$$\begin{aligned}\theta_g(s) &= \vec{g} \cdot \frac{d\vec{h}}{ds} \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \sin s - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \cos s + 0\end{aligned}$$

D'où

$$\theta_g = 0$$



La Figure 3 : La surface 3M

Conclusion

En guise de conclusion, de nombreux chercheurs ont récemment étudié les courbes et les surfaces en utilisant le cadre de Bishop, de la même manière qu'ils ont étudié les courbes et les surfaces en utilisant le cadre de Frenet. Le concept de cadre de Darboux a été récemment démontré, et il y'a une chance que des autres études puissent être menées à l'avenir. A l'aide de repère de Darboux, nous étudions la caractérisation des surfaces régulières en calculant leurs invariants et finalisant par illustrer des figures.

Bibliographie

- [1] Dr. OUAZZANI Amina, cours de géométrie Des Courbes et Des Surfaces. Master Annalyse Mathématique et Applications, 2021-2022.
- [2] J.Lelong-Ferrand. J.M.Arnaudiès, Cours de Mathématiques, Tome 3, Géométrie et cinématique, 1997.
- [3] ECHABBI Nabil. Mme OUAZZANI Amina, Article sur researchgate.
- [4] <https://fr-academic.com/dic.nsf/frwiki/1427160>.
- [5] Paul A. Blaga, Lectures on the differential Geometry of Curves and Surfaces.
- [6] Wolfgang Kuhnel, Differential Geometry Curves - Surfaces - Manifolds.
- [7] Pierron Théo, Géométrie différentielle.
- [8] M. Berger, B. Gostiaux, Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces, 1992.
- [9] M. Audin, Géométrie, 2006.