



FACULTE DES SCIENCES BEN M'SICK
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

PROJET DE FIN D'ETUDE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER EN MATHEMATIQUES

Présenté par :

Khan Salma

Surfaces de translation générées par des indicatrices sphériques de courbes régulières d'un espace euclidien de dimension 3

Soutenu le 17/06/2022, devant la commission d'examen :

Pr. M. RIHANI	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Président
Pr. M. GUESSOUS	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Examineur
Pr. M. IZID	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Co-encadrante
Pr. A. OUAZZANI CHAHDI	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Encadrante

Année Universitaire 2021-2022

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous nous intéressons aux surfaces de translation dans l'espace euclidien tridimensionnel \mathbb{E}^3 et à certaines de leurs caractérisations. Il s'agit d'étudier les surfaces de translations générées par deux courbes spatiales arbitraires, et plus particulièrement les surfaces de translation définies par les indicatrices sphériques de deux courbes spatiales. En déterminant les coefficients de la première et la deuxième forme fondamentale, les courbures gaussienne et moyenne, nous donnons les conditions pour que ces surfaces soient développables, respectivement minimales et puis nous étudions le cas particulier où les courbes génératrices sont des hélices générales ou des courbes planes. Et pour illustrer ces résultats, nous étudions certains exemples de ces surfaces à l'aide du programme MATLAB.

Mots clés : Surface de translation, Courbure gaussienne, Courbure moyenne, Surface minimale, Surface développable, Courbures principales, Formes fondamentales, Vecteur normal unitaire, Repère de Frenet.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je tiens à remercier ALLAH le tout puissant de m' avoir donné la santé, la volonté, le courage et la patience pour mener à terme ma formation et pourvoir réaliser ce travail de recherche.

En guise de reconnaissance, je tiens à remercier, très sincèrement, le Professeur Amina OUAZZANI CHAHDI, pour son encadrement de qualité, sa motivation professionnelle, ses conseils et critiques constructives, ses corrections, sa gentillesse et sa patience ainsi pour le temps qu'elle a consacré à la réalisation de ce travail. Mes remerciements vont également à Mme Malika IZID pour sa disponibilité, pour son suivi, son écoute et sa gentillesse.

Mes remerciements vont également au professeur Y.EL FOUTAYENI, coordonnateur du master AMA pour ses efforts remarquables tout au long de ces deux années de la formation.

Je tiens à remercier les membres du jury, les professeurs M. RIHANI, M. GUESSOUS, M. IZID pour leur présence, pour leur lecture attentive de ce travail, ainsi que pour les remarques qu'ils m'adresseront lors de cette soutenance afin d'améliorer mon travail.

Mes remerciements vont aussi à l'ensemble des professeurs qui ont assuré avec succès l'encadrement et l'enseignement du Master AMA, et à tout ceux qui ont participé de loin ou de près à la réalisation de ce travail.

Je tiens aussi à adresser mes remerciements à ma famille pour leur amour, leur sacrifice ainsi que pour leur soutien tout au long de mes études.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	5
1 Préliminaires	8
1.1 Propriétés métriques d'une courbe régulière	8
1.1.1 Paramétrisation normale d'une courbe régulière	8
1.1.2 Repère de Frenet et ses formules de dérivation	9
1.2 Propriétés métriques d'une surface régulière	10
1.2.1 Vecteur normal et surface à angle constant	10
1.2.2 Les deux formes quadratiques fondamentales	11
1.2.3 Surface développable et surface minimale	12
1.3 Les invariants de Darboux d'une courbe tracée sur une surface	13
1.3.1 Courbe tracée sur une surface	13
1.3.2 Repère de Darboux et ses formules de dérivation	14
2 Définition et premières propriétés des surfaces de translation	15
2.1 Définition	15
2.2 Courbures sur les surfaces de translation	15
2.3 Classification de quelques points sur la surface de translation	21
3 Surfaces de translation générées par des indicatrices sphériques de courbes régulières	30
3.1 Surfaces de translation générées par les indicatrices tangentes de courbes régulières de \mathbb{E}^3	30

3.2 Surfaces de translation générées par les indicatrices normales principales de courbes régulières de \mathbb{E}^3	38
3.3 Surfaces de translation générées par les indicatrices binormales de courbes régulières de \mathbb{E}^3	45
Conclusion et perspectives	53
Bibliographie	54

INTRODUCTION

Le domaine dans lequel se situe ce travail est celui de la géométrie des courbes et surfaces (géométrie différentielle classique). Dans cette branche de la géométrie, nous nous intéressons particulièrement à l'étude de diverses propriétés des surfaces d'un espace euclidien tridimensionnel \mathbb{E}^3 . Dans cet objectif, nous nous intéressons à l'étude d'un type de surfaces spécifiques dites les surfaces de translation.

La géométrie d'une surface se compose de certaines propriétés telles que l'aire, la distance, l'angle et la courbure. La plus importante d'entre elles est la notion de courbure, qui révèle les différences structurelles entre les surfaces. Les surfaces développables et minimales (avec des courbures Gaussienne et moyenne, nulles), ont une importance majeure en géométrie. En particulier, une surface minimale est une surface qui minimise localement son aire. Outre les plans, les caténoïdes et les hélicoïdes, l'apparition de surfaces minimales peut également être observée dans la nature : dans les structures que construisent les animaux, dans diverses anatomies végétales et animales, etc.

Les surfaces que nous désirons étudier trouvent leur origine dans le texte classique de G. Darboux [1, Livre I] où elles sont considérées comme « surfaces définies par des propriétés cinématiques », et plus tard connues sous le nom de surfaces de Darboux dans la Littérature. Une surface de Darboux est une surface qui est réunion de courbes « égales » (i.e. images les unes des autres par des isométries de l'espace), appelées ses génératrices. Ainsi, une paramétrisation d'une telle surface est donnée par

$$\psi(s, t) = A(t) \cdot \alpha(s) + \beta(t),$$

où α et β sont deux courbes spatiales et $A(t)$ est une matrice orthogonale. Le cas que nous étudions dans ce travail est celui où $A(t)$ est l'identité $A(t) = I_3$.

En géométrie différentielle, une surface de translation est une surface générée par des

translations, c'est-à-dire une surface qu'on obtient lorsqu'une courbe $\alpha(u)$ est translatée sur une autre courbe $\beta(v)$. Les surfaces de translation peuvent être paramétrées localement par

$$\phi(u, v) = (u, v, f(u) + g(v)),$$

où $f(u)$ et $g(v)$ sont des fonctions lisses sur un intervalle de \mathbb{R} .

En théorie des surfaces, il existe des surfaces spéciales telles que les surfaces minimales, les surfaces développable et les surfaces à courbure constante. Au cours des siècles, les surfaces de translation ont été étudiées par de nombreux géomètres.

En 1835, H. F. Scherk étudie les surfaces de translation dans \mathbb{E}^3 définies comme le graphe de la fonction $z(u, v) = f(u) + g(v)$ et il prouve que, outre les plans, les seules surfaces de translation minimales (rappelons qu'une surface minimale dans \mathbb{R}^3 est une surface dont la courbure moyenne est nulle partout) sont les surfaces données par

$$\phi(u, v) = \left(u, v, \frac{1}{c} \log \left| \frac{\cos(cu)}{\cos(cv)} \right| \right),$$

où c est une constante réelle non nulle.

Ce travail porte sur les surfaces de translation dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 . Le but étant d'étudier leurs propriétés (minimales ou développables), et de classifier certains points de la surface. Ce travail intitulé « Surfaces de translation générées par des indicatrices sphériques de courbes régulières d'un espace euclidien de dimension 3 » comprend trois chapitres :

- Le premier chapitre : portant sur les « Préliminaires », donne une présentation rapide des outils de base utilisés tout au long de ce travail et qui concernent essentiellement les surfaces régulières, les invariants de Frenet, les formes fondamentales, les surfaces minimales, les surfaces développables, les invariants de Darboux et les formules de dérivation.
- Le deuxième chapitre : intitulé « Définitions et premières propriétés des surfaces de translation », porte sur l'étude générale des surfaces de translation générées par deux courbes spatiales arbitraires dans l'espace euclidien tridimensionnel. Dans ce sens, nous déterminons les coefficients de la première et la deuxième forme fondamentale, la courbure moyenne, la courbure gaussienne, les courbures principales, et nous étudions l'influence des courbures des génératrices sur la surface de translation. Puis, nous classifions quelques points particuliers sur ces surfaces tels que les points elliptiques, hyperboliques, paraboliques, ombilicaux et singuliers. On termine ce chapitre par la donnée de plusieurs exemples illustrant cette étude.

-
- Le troisième chapitre : nommé « Surfaces de translation générées par les indicatrices sphériques de courbes régulières », porte sur l'étude des surfaces de translation définies moyennant les indicatrices sphériques de deux courbes spatiales dans \mathbb{E}^3 . Pour chacune des surfaces de translation obtenues, nous faisons une étude détaillée portant sur les conditions pour que cette surface soit développable (respectivement minimale), et nous étudions les cas particuliers où les courbes génératrices sont des hélices ou des courbes planes, et on complète l'étude par un exemple illustré à l'aide du programme MATLAB.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

1.1 Propriétés métriques d'une courbe régulière

1.1.1 Paramétrisation normale d'une courbe régulière

Définition 1.1.1. Une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^n est une application

$$\begin{aligned}\alpha : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)),\end{aligned}$$

où I est un intervalle de \mathbb{R} et les composantes α_i sont des fonctions continues sur I .
L'ensemble des points de \mathbb{R}^n :

$$\{\alpha(t), t \in I\}$$

est appelé le support de α .

Définition 1.1.2. Soit α une courbe paramétrée, définie par une paramétrisation

$$\begin{aligned}\alpha : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)).\end{aligned}$$

(i) Un point $M = \alpha(t)$ est dit régulier (ou ordinaire) si

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t)) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$$

sinon, il est dit stationnaire.

(ii) α est dite une courbe régulière si elle est régulière en tout point.

Définition 1.1.3. Soit α une courbe paramétrée, la paramétrisation

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est dite normale si elle vérifie

$$\|\alpha'(t)\| = 1, \quad \forall t \in I.$$

Définition 1.1.4. Soit α une courbe régulière définie par une paramétrisation $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k ($k \geq 1$). On appelle longueur de la courbe α , le nombre défini par

$$L(\alpha) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Remarque 1.1.5. Pour qu'une courbe α soit simple, il suffit que l'une de ses paramétrisations soit injective.

Définition 1.1.6. Soit α une courbe simple et orientée dans le sens des t croissants définie par une paramétrisation (I, f) et t_0 un point de I . La fonction s définie sur I par

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du.$$

est appelée abscisse curviligne de la courbe α d'origine t_0 , au point t .

1.1.2 Repère de Frenet et ses formules de dérivation

Soit α une paramétrisation normale d'une courbe régulière

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\longmapsto \alpha(s) \end{aligned}$$

Définition 1.1.7. On appelle vecteur tangent unitaire en un point $M = \alpha(s)$ de la courbe α , le vecteur

$$t(s) = \alpha'(s).$$

Définition 1.1.8. La fonction numérique définie sur I par

$$s \longmapsto \kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$$

est appelée la fonction courbure de α .

On définit alors le vecteur normal à α en s comme l'unique vecteur unitaire $n(s)$ tel que $\alpha''(s) = \kappa(s)n(s)$ lorsque $\kappa \neq 0$.

Définition 1.1.9. On appelle vecteur binormal à α en s , $b(s) = t(s) \wedge n(s)$, c'est un vecteur unitaire orthogonal au plan osculateur.

Définition 1.1.10. La torsion de α en s , notée $\tau(s)$, est l'unique réel tel que

$$b'(s) = -\tau(s)n(s).$$

Définition 1.1.11. Les vecteurs $t(s)$, $n(s)$, $b(s)$ sont appelés vecteurs de Frenet au point $\alpha(s)$ de la courbe $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. L'ensemble $\{t(s), n(s), b(s)\}$ est appelé repère de Frenet au point $\alpha(s)$ de la courbe α .

Théorème 1.1.12. Soit $\{t(s), n(s), b(s)\}$ le repère de Frenet de la courbe α , les dérivées des vecteurs $t(s)$, $n(s)$, $b(s)$ sont exprimées comme suit

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n, \\ n' &= -\kappa t + \tau b, \\ b' &= -\tau n. \end{aligned}$$

Les équations obtenues dans ce théorème sont appelées les formules de Frenet de la courbe α .

Il peuvent également être exprimées sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} t'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{bmatrix}.$$

1.2 Propriétés métriques d'une surface régulière

1.2.1 Vecteur normal et surface à angle constant

Définition 1.2.1. Une surface paramétrée de classe C^k (avec $k \geq 1$) est un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 de la forme

$$S = \left\{ f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3 / (u, v) \in D \right\}$$

où D est un domaine de \mathbb{R}^2 et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ est de classe C^k .

Définition 1.2.2. Une surface paramétrée f est dite régulière en $(u, v) \in D$ si $f_u(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ et $f_v(u, v) = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ sont linéairement indépendants, ou de façon équivalente, si la différentielle $df_{(u,v)}$ est de rang deux.

Lemme 1.2.3. Le point $(u, v) \in D$ est régulier si et seulement si

$$f_u(u, v) \wedge f_v(u, v) \neq 0.$$

Définition 1.2.4. Soit S une surface paramétrée par $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, et soit $P = f(u, v)$ un point régulier de S . On appelle :

- **Plan tangent** à S au point P , le plan engendré par les vecteurs $f_u(u, v)$ et $f_v(u, v)$ et passant par P :

$$\begin{aligned} T_P(S) &= P + \text{Vect}(f_u(u, v), f_v(u, v)) \\ &= \left\{ f(u, v) + \lambda f_u(u, v) + \mu f_v(u, v) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

- **Vecteur normal (unitaire)** à S en P le vecteur :

$$N(u, v) = \frac{f_u(u, v) \wedge f_v(u, v)}{\|f_u(u, v) \wedge f_v(u, v)\|}.$$

Définition 1.2.5. Une surface d'angle constant dans \mathbb{E}^3 est une surface dont le vecteur normal unitaire fait un angle constant avec un champ de direction fixe.

1.2.2 Les deux formes quadratiques fondamentales

Soit

$$\begin{aligned} X : D &\longrightarrow \mathbb{E}^3 \\ (u, v) &\longmapsto X(u, v), \end{aligned}$$

une paramétrisation de la surface S . Au point $P = X(u, v)$, le plan vectoriel tangent $T_P(S)$ est dirigé par les vecteurs

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v}(u, v).$$

Un vecteur V de $T_P(S)$ s'écrit dans cette base comme $V = \lambda \frac{\partial P}{\partial u} + \mu \frac{\partial P}{\partial v}$.

$$\begin{aligned} \|V\|^2 &= \left\| \lambda \frac{\partial P}{\partial u} + \mu \frac{\partial P}{\partial v} \right\|^2 \\ &= \left\| \frac{\partial P}{\partial u} \right\|^2 \lambda^2 + 2 \left\langle \frac{\partial P}{\partial u}, \frac{\partial P}{\partial v} \right\rangle \lambda \mu + \left\| \frac{\partial P}{\partial v} \right\|^2 \mu^2. \end{aligned}$$

Définition 1.2.6. On appelle première forme quadratique fondamentale, la restriction à $T_P(S)$ de la forme quadratique

$$I_P : V \longmapsto \|V\|^2,$$

on obtient

$$I_P(V) = I_P \left(\lambda \frac{\partial P}{\partial u} + \mu \frac{\partial P}{\partial v} \right) = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2,$$

où

$$E = \left\| \frac{\partial P}{\partial u} \right\|^2, \quad F = \left\langle \frac{\partial P}{\partial u}, \frac{\partial P}{\partial v} \right\rangle, \quad G = \left\| \frac{\partial P}{\partial v} \right\|^2.$$

Définition 1.2.7. On définit la seconde forme fondamentale comme étant la forme quadratique :

$$\begin{aligned} II_P : T_P(S) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto -\langle d_P N(w), w \rangle. \end{aligned}$$

La deuxième forme fondamentale de S au point P définie sur $T_P(S)$ est donnée par

$$II_P(V) = l\lambda^2 + 2m\lambda\mu + n\mu^2,$$

Où

$$l = \left\langle \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}, N \right\rangle, \quad m = \left\langle \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}, N \right\rangle, \quad n = \left\langle \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}, N \right\rangle.$$

et N le vecteur normal à S en P .

1.2.3 Surface développable et surface minimale

Définition 1.2.8. Soient κ_1 et κ_2 les courbures principales d'une surface S . La courbure de Gauss et la courbure moyenne sont respectivement définies par :

$$K = \kappa_1 \kappa_2,$$

et

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2).$$

Pour calculer la courbure de Gauss et la courbure moyenne, nous utilisons la première et la deuxième forme fondamentale de la surface S , définies par

$$\begin{aligned} I_P(V) &= E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2, \\ II_P(V) &= l\lambda^2 + 2m\lambda\mu + n\mu^2. \end{aligned}$$

Ensuite, nous adoptons la notation matricielle :

$$\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2 = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}.$$

Par définition, les courbures principales sont les valeurs propres de $\mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_2$. Le déterminant de cette matrice est donc le produit $\kappa_1 \kappa_2$, c'est-à-dire la courbure de Gauss K . Donc

$$\begin{aligned} K &= \det(\mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_2) \\ &= \det(\mathcal{F}_1)^{-1} \det(\mathcal{F}_2) \end{aligned}$$

$$= \frac{ln - m^2}{EG - F^2}.$$

La trace de la matrice est la somme de ses valeurs propres, donc le double de la courbure moyenne H . Après quelques calculs, on obtient

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \text{trace} (\mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{lG - 2mF + nE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Inversement, étant donné les courbures gaussiennes et moyennes K et H , on trouve facilement les courbures principales κ_1 et κ_2 , qui sont les racines de l'équation

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0,$$

i.e., $H \pm \sqrt{H^2 - K}$.

Définition 1.2.9. Soit S une surface (paramétrée) régulière, on dit qu'elle est minimale si sa courbure moyenne est nulle en tout point, et on dit que S est développable si sa courbure de Gauss est nulle en tout point.

1.3 Les invariants de Darboux d'une courbe tracée sur une surface

1.3.1 Courbe tracée sur une surface

Soit S une surface régulière définie par

$$\begin{aligned} X : D \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longrightarrow X(u, v), \end{aligned}$$

de classe C^k ($k \geq 1$). et soit γ , l'arc plan défini par la paramétrisation

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow D \\ t &\longrightarrow (u(t), v(t)). \end{aligned}$$

L'arc Γ défini par la paramétrisation

$$\begin{aligned} P : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow (X \circ \alpha)(t) = X(u(t), v(t)), \end{aligned}$$

est dit arc tracé sur S .

1.3.2 Repère de Darboux et ses formules de dérivation

Définition 1.3.1. Soit γ une courbe régulière tracée sur S et $s \rightarrow P(s)$ une paramétrisation normale de γ . On appelle repère de Darboux de γ , le repère

$$(P(s), \tau(s), g(s), h(s))$$

associé au couple $(P(s), \tau(s))$ où

- (i) $\tau(s) = \frac{dP}{ds}$ vecteur tangent unitaire à γ ,
- (ii) $h(s)$ vecteur unitaire normal en P à S ,
- (iii) $g(s) = h(s) \wedge \tau(s)$.

- La fonction :

$$\kappa_n : s \rightarrow \kappa_n(s) = h(s) \cdot \frac{d\tau}{ds} = -\tau \cdot \frac{dh}{ds}$$

est appelée la courbure normale de γ .

- La fonction :

$$\kappa_g : s \rightarrow \kappa_g(s) = g(s) \cdot \frac{d\tau}{ds} = -\tau \cdot \frac{dg}{ds}$$

est appelée la courbure géodésique de γ .

- La fonction :

$$\theta_g : s \rightarrow \theta_g(s) = g(s) \cdot \frac{dh}{ds} = -h \cdot \frac{dg}{ds}$$

est appelée la torsion géodésique de γ .

Il s'en suit les formules de Darboux :

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{ds} &= \kappa_g g + \kappa_n h, \\ \frac{dg}{ds} &= -\kappa_g \tau - \theta_g h, \\ \frac{dh}{ds} &= -\kappa_n \tau + \theta_g g.\end{aligned}$$

CHAPITRE 2

DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DES SURFACES DE TRANSLATION

2.1 Définition

Une surface de translation est une surface qui peut être générée à partir de deux courbes spatiales en déplaçant l'une d'entre elles parallèlement à elle-même de telle sorte que chacun de ses points décrive une courbe qui est une translation de l'autre courbe.

Définition 2.1.1. Une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est dite surface de translation si S s'écrit localement comme la somme de deux courbes spatiales :

$$X(u, v) = \alpha(u) + \beta(v),$$

où $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\beta : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Les courbes α et β sont appelées courbes génératrices de S . Si α et β sont des courbes planes, la surface est dite surface de translation de type planaire.

2.2 Courbures sur les surfaces de translation

Soit $X(u, v)$ une surface de translation dans l'espace euclidien de dimension 3, noté \mathbb{E}^3 définie par :

$$X(u, v) = \alpha(u) + \beta(v), \tag{2.2.1}$$

où les variables u et v sont les paramètres de la longueur d'arc pour les deux courbes génératrices $\alpha(u)$ et $\beta(v)$, respectivement. Soit $\{t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha\}$ le repère de Frenet de la courbe α , avec la courbure κ_α et la torsion τ_α . De même soit $\{t_\beta, n_\beta, b_\beta\}$ le repère de Frenet de la courbe β , avec la courbure κ_β et la torsion τ_β .

En calculant les dérivées partielles de (2.2.1) par rapport à u et v respectivement, on obtient :

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial X(u, v)}{\partial u} \\ &= \alpha'(u) \\ &= t_\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_v &= \frac{\partial X(u, v)}{\partial v} \\ &= \beta'(v) \\ &= t_\beta. \end{aligned}$$

Il s'en suit les composantes de la première forme fondamentale :

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle t_\alpha, t_\alpha \rangle = 1, \quad (2.2.2)$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle t_\alpha, t_\beta \rangle = \|t_\alpha\| \|t_\beta\| \cos[\phi(u, v)] = \cos[\phi(u, v)], \quad (2.2.3)$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \langle t_\beta, t_\beta \rangle = 1, \quad (2.2.4)$$

où $\phi = \phi(u, v)$ est l'angle entre les vecteurs tangents de $\alpha(u)$ et $\beta(v)$. Le vecteur normal unitaire de la surface de translation (2.2.1) est donné par :

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{t_\alpha \wedge t_\beta}{\|t_\alpha \wedge t_\beta\|} \\ &= \frac{t_\alpha \wedge t_\beta}{\|t_\alpha\| \|t_\beta\| \sin[\phi(u, v)]} \\ &= \frac{t_\alpha \wedge t_\beta}{\sin[\phi(u, v)]}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

D'où les composantes de la deuxième forme fondamentale de X :

$$\begin{aligned} l &= \langle X_{uu}, N \rangle \\ &= \langle t'_\alpha, N \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \kappa_\alpha n_\alpha, N \rangle \\
&= \kappa_\alpha \| n_\alpha \| \| N \| \cos[\theta_\alpha(u, v)] \\
&= \kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u, v)],
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

$$\begin{aligned}
m &= \langle X_{uv}, N \rangle \\
&= \langle 0, N \rangle \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

$$\begin{aligned}
n &= \langle X_{vv}, N \rangle \\
&= \langle t'_\beta, N \rangle \\
&= \langle \kappa_\beta n_\beta, N \rangle \\
&= \kappa_\beta \| n_\beta \| \| N \| \cos[\theta_\beta(u, v)] \\
&= \kappa_\beta \cos[\theta_\beta(u, v)],
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

où $\theta_\alpha(u, v)$ et $\theta_\beta(u, v)$ sont les angles entre N et n_α , n_β , respectivement.

Remarque 2.2.1. *Il est à noter que, pour les courbes dégénérées ($\kappa = 0$), la tangente, la normale et la binormale sont supposées des vecteurs constants.*

Théorème 2.2.2. *Soit ϕ l'angle entre les vecteurs tangents t_α et t_β . Pour la surface de translation (2.2.1) nous avons :*

- (i) *L'angle ϕ dépend des variables u et v , si et seulement si les deux courbes $\alpha = \alpha(u)$ et $\beta = \beta(v)$ sont des courbes non dégénérées ($\kappa_\alpha \neq 0$ et $\kappa_\beta \neq 0$).*
- (ii) *L'angle ϕ dépend uniquement de u si et seulement si $\kappa_\alpha \neq 0$ et $\kappa_\beta = 0$.*
- (iii) *L'angle ϕ dépend uniquement de v si et seulement si $\kappa_\alpha = 0$ et $\kappa_\beta \neq 0$.*
- (iv) *L'angle ϕ est constant si et seulement si les deux courbes $\alpha(u)$ et $\beta(v)$ sont des courbes dégénérées ($\kappa_\alpha = 0$ et $\kappa_\beta = 0$).*

Démonstration. *On a*

$$\langle t_\alpha(u), t_\beta(v) \rangle = \cos[\phi(u, v)]$$

Il s'en suit les équivalences

- (i) $(u, v) \rightarrow \phi(u, v)$ dépend de u et v
 - $\Leftrightarrow u \rightarrow t_\alpha(u)$ et $v \rightarrow t_\beta(v)$ ne sont pas constants (i.e. $t'_\alpha(u) \neq 0$ et $t'_\beta(v) \neq 0$),
 - $\Leftrightarrow \kappa_\alpha \neq 0$ et $\kappa_\beta \neq 0$.
- (ii) $(u, v) \rightarrow \phi(u, v) = \phi(u)$ (ϕ ne dépend que de u),
 - $\Leftrightarrow v \rightarrow t_\beta(v)$ est constant $u \rightarrow t_\alpha(u)$ varie.
 - $\Leftrightarrow \kappa_\alpha \neq 0$ et $\kappa_\beta = 0$.

(iii) $(u, v) \rightarrow \phi(u, v) = \phi(v)$ (ϕ ne dépend que de v),

$$\Leftrightarrow \kappa_\alpha = 0 \text{ et } \kappa_\beta \neq 0.$$

(iv) $(u, v) \rightarrow \phi(u, v) = \text{cste}$ (ϕ ne dépend ni de u , ni de v),

$$\Leftrightarrow u \rightarrow t_\alpha(u) \text{ et } v \rightarrow t_\beta(v) \text{ sont des constants,}$$

$$\Leftrightarrow \kappa_\alpha = 0 \text{ et } \kappa_\beta = 0.$$

Lemme 2.2.3. Si les courbures des deux génératrices de la surface de translation (2.2.1) sont nulles ($\kappa_\alpha = \kappa_\beta = 0$), alors les angles θ_α , θ_β et ϕ sont constants.

Démonstration. Si $\kappa_\alpha = \kappa_\beta = 0$, alors t_α et t_β sont constants et dans ce cas, la normale

$N = \frac{t_\alpha \wedge t_\beta}{\|t_\alpha \wedge t_\beta\|}$ est constante. Il s'en suit que les angles θ_α , θ_β et ϕ définis par :

$$\cos \phi = \langle t_\alpha, t_\beta \rangle,$$

$$\cos \theta_\alpha = \langle N, n_\alpha \rangle,$$

$$\cos \theta_\beta = \langle N, n_\beta \rangle,$$

sont constants.

Proposition 2.2.4. La courbure gaussienne K , la courbure moyenne H et Les courbures principales κ_1 et κ_2 , de la surface de translation X , sont respectivement :

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta}{\sin^2 \phi},$$

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta}{2 \sin^2 \phi},$$

$$\kappa_1 = \frac{\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta}{2 \sin^2 \phi} \left(1 + \left[1 - \frac{4 \kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta \sin^2 \phi}{(\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta)^2} \right] \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\kappa_2 = \frac{\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta}{2 \sin^2 \phi} \left(1 - \left[1 - \frac{4 \kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta \sin^2 \phi}{(\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta)^2} \right] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. On a

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}.$$

En utilisant (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4), (2.2.6), (2.2.7) et (2.2.8), on obtient :

$$\begin{aligned} K &= \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta}{1 - \cos^2 \phi(u, v)}, \\ &= \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta}{\sin^2 \phi}. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

On a

$$H = \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)}.$$

En utilisant (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4), (2.2.6), (2.2.7) et (2.2.8), on obtient :

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta}{2 \sin^2 \phi}. \quad (2.2.10)$$

Et on a

$$\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

$$\kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

En utilisant (2.2.9), et (2.2.10), on obtient :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta}{2 \sin^2 \phi} \left(\left(\frac{\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta}{2 \sin^2 \phi} \right)^2 - \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta}{\sin^2 \phi} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta}{2 \sin^2 \phi} \left(1 + \left[1 - \frac{4 \kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta \sin^2 \phi}{(\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

et

$$\kappa_2 = \frac{\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta}{2 \sin^2 \phi} \left(1 - \left[1 - \frac{4 \kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta \sin^2 \phi}{(\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right).$$

Théorème 2.2.5. Si l'une des courbes génératrices est une courbe dégénérée, alors la surface de translation générée par les deux courbes spatiales est une surface développable.

Démonstration. Si $\kappa_\alpha = 0$ (resp. $\kappa_\beta = 0$), alors d'après la formule (2.2.9), $K = 0$.

Lemme 2.2.6. La surface de translation générée par deux courbes spatiales dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 est développable si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- (i) L'angle ϕ ne dépend que de u .
- (ii) L'angle ϕ ne dépend que de v .
- (iii) L'angle ϕ est constant.

Démonstration. On a

$$K = \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta}{\sin^2 \phi}.$$

En effet si ϕ dépend de u et v , d'après ce qui précède $\kappa_\alpha \neq 0$, $\kappa_\beta \neq 0$ et les angles θ_α et θ_β aussi varient, et par suite la surface n'est pas développable. et on conclut grâce au théorème (2.2.2).

Théorème 2.2.7. La surface de translation X générée par deux courbes spatiales dans l'espace

euclidien \mathbb{E}^3 est une surface minimale si et seulement si

$$\frac{\cos[\theta_\alpha(u, v)]}{\cos[\theta_\beta(u, v)]} = -\frac{\kappa_\beta(v)}{\kappa_\alpha(u)}.$$

Démonstration. Soit X une surface minimale, alors $H = 0$, ce qui est équivalent d'après (2.2.10) à

$$\kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u, v)] + \kappa_\beta \cos[\theta_\beta(u, v)] = 0$$

soit

$$\kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u, v)] = -\kappa_\beta \cos[\theta_\beta(u, v)]$$

ce qui équivaut à

$$\frac{\cos[\theta_\alpha(u, v)]}{\cos[\theta_\beta(u, v)]} = -\frac{\kappa_\beta(v)}{\kappa_\alpha(u)}.$$

Corollaire 2.2.8. Si la surface de translation X est minimale, alors la courbure gaussienne est donnée par :

$$K = -\left(\frac{\kappa_\alpha(u) \cos[\theta_\alpha(u, v)]}{\sin \phi(u, v)}\right)^2.$$

Démonstration. Si la surface de translation X est minimale, alors d'après le théorème (2.2.7), il vient :

Soit

$$\frac{\cos[\theta_\alpha(u, v)]}{\cos[\theta_\beta(u, v)]} = -\frac{\kappa_\beta(v)}{\kappa_\alpha(u)}$$

$$\cos[\theta_\beta(u, v)] = -\frac{\kappa_\alpha(u) \cos[\theta_\alpha(u, v)]}{\kappa_\beta(v)},$$

d'où

$$\theta_\beta(u, v) = \cos^{-1} \left[-\frac{\kappa_\alpha(u) \cos[\theta_\alpha(u, v)]}{\kappa_\beta(v)} \right]. \quad (2.2.11)$$

On reportant l'équation (2.2.11) dans l'équation (2.2.9), on obtient :

$$K = -\frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos[\theta_\alpha(u, v)] \frac{\kappa_\alpha(u) \cos[\theta_\alpha(u, v)]}{\kappa_\beta(u)}}{\sin^2[\phi(u, v)]}$$

$$= \frac{-\kappa_\alpha^2 \cos^2[\theta_\alpha(u, v)]}{\sin^2[\phi(u, v)]}$$

$$= -\left(\frac{\kappa_\alpha \cos[\theta_\alpha(u, v)]}{\sin[\phi(u, v)]}\right)^2.$$

2.3 Classification de quelques points sur la surface de translation

Dans cette section nous étudierons comment la courbure normale en un point d'une surface varie lorsqu'un vecteur tangent unitaire varie. On sait qu'une surface régulière paramétrée par $X : \Omega \rightarrow \mathbb{E}^3$ (où Ω est un sous ensemble ouvert et connexe du plan) a deux courbures principales $\kappa_1(u, v)$ et $\kappa_2(u, v)$ en chaque point $P = X(u, v)$ de la surface.

Si $\kappa_1(u, v) \leq \kappa_2(u, v)$, alors $\kappa_1(u, v)$ est le minimum des courbures normales dans différentes directions en P , tandis que $\kappa_2(u, v)$ est le maximum entre eux.

Si $\kappa_1(u, v) < \kappa_2(u, v)$, alors les directions principales correspondant à $\kappa_1(u, v)$ et $\kappa_2(u, v)$ sont définies de manière unique, cependant si $\kappa_1 = \kappa_2$ alors la courbure normale est constante dans toutes les directions et chaque direction est principale.

En rappelant que $EG - F^2$ est toujours strictement positif, on peut classer certains points particuliers tels qu'elliptiques, hyperboliques, paraboliques, singuliers ainsi qu'ombliques sur la surface X , en fonction de la valeur de la courbure gaussienne K , et les valeurs des courbures principales $\kappa_1(u, v)$ et $\kappa_2(u, v)$

Définition 2.3.1. Soit S une surface et P un point de S

- (i) P est elliptique si $ln - m^2 > 0$, ou de manière équivalente $K > 0$.
- (ii) P est hyperbolique si $ln - m^2 < 0$, ou de manière équivalente $K < 0$.
- (iii) P est parabolique si $ln - m^2 = 0$ et $l^2 + m^2 + n^2 > 0$ ou de manière équivalente $K = 0$, avec $\kappa_1(u, v) \neq 0$ ou $\kappa_2(u, v) \neq 0$, c'est-à-dire qu'une seule parmi les courbures principales est égale à zéro.
- (iv) P est ombilical (ou ombilic) si les courbures principales à P sont égales, et un point ombilical P est dit sphérique si $\kappa_1 = \kappa_2 \neq 0$, et plat (planaire) si $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$.

Définition 2.3.2. Un point P est un point ombilical si et seulement si $H^2 - K = 0$ en ce point.

Définition 2.3.3. Soit $\alpha(u)$ une courbe dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 tracée sur une surface S .

- (i) $\alpha(u)$ est une droite asymptotique si et seulement si la courbure normale κ_n s'annule.
- (ii) $\alpha(u)$ est une droite principale si et seulement si la torsion géodésique τ_g s'annule.
- (iii) $\alpha(u)$ est une courbe géodésique si et seulement si la courbure géodésique κ_g s'annule.

En désignant toujours par X la surface de translation définie par

$$X(u, v) = \alpha(u) + \beta(v),$$

et en tenant compte de la formule (2.2.9), donnant la courbure de K en fonction des courbures des courbes α et β :

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta}{\sin^2 \phi},$$

il vient :

Premier cas : le point P est un point elliptique de la surface X si et seulement si $K > 0$, et par suite les courbures principales de la surface X , κ_1 et κ_2 sont de mêmes signes. Dans ce cas $\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta > 0$.

Si κ_α et κ_β ont le même signe, alors θ_α et $\theta_\beta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ ou θ_α et $\theta_\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$. Lorsque κ_α et κ_β sont de signes opposés, alors $\theta_\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\theta_\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ ou $\theta_\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ et $\theta_\beta \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Deuxième cas : le point P est un point hyperbolique de la surface X si et seulement si $K < 0$, et par suite les courbures principales de la surface X , κ_1 et κ_2 sont de signes opposés. Dans ce cas $\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta < 0$. Si κ_α et κ_β ont le même signe, alors $\theta_\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\theta_\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ ou $\theta_\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ et $\theta_\beta \in [0, \frac{\pi}{2}[$. lorsque κ_α et κ_β sont de signes opposés, alors θ_α et $\theta_\beta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ ou θ_α et $\theta_\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Troisième cas : le point P est un point parabolique de la surface X si et seulement si $K = 0$.

Dans ce cas $\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta = 0$, et par suite l'un des cas suivants est satisfait : $\kappa_\alpha = 0$ ou $\kappa_\beta = 0$ ou $\cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta = 0$.

Si $\kappa_\alpha = 0$ ou $\kappa_\beta = 0$, alors $\kappa_1 \neq 0$ et $\kappa_2 = 0$.

Si $\cos \theta_\alpha = 0$ ou $\cos \theta_\beta = 0$, alors $\kappa_1 \neq 0$ et $\kappa_2 = 0$.

Si $\cos \theta_\alpha = 0$ et $\cos \theta_\beta = 0$, dans ce cas $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ et le point P est un point plat de la surface X .

Quatrième cas : le point P est un point ombilical de la surface X si et seulement si $H^2 - K = 0$. D'après ce qui précède, on obtient

$$\begin{aligned} H^2 - K &= \left(\frac{\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta}{2 \sin^2 \phi} \right)^2 - \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta}{\sin^2 \phi} \\ &= \frac{1}{4 \sin^4 \phi} \left[\kappa_\alpha^2 \cos^2 \theta_\alpha + \kappa_\beta^2 \cos^2 \theta_\beta + 2 \kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta (1 - 2 \sin^2 \phi) \right] = 0. \end{aligned}$$

Sur la base de l'équation ci-dessus, le point P est un point ombilical de la surface X si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- (i) $\kappa_\alpha = \kappa_\beta = 0$, ce qui implique d'après (2.2.9), et (2.2.10) que les courbures gaussienne et moyenne sont nulles. Dans ce cas le point P est un point planaire et $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$.

- (ii) $\kappa_\alpha = 0$ et $\theta_\beta = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ $n \in \mathbb{Z}$, ce qui implique d'après (2.2.9), et (2.2.10) que $K = H = 0$ et le point P est un point planaire, ($\kappa_1 = \kappa_2 = 0$).
- (iii) $\kappa_\beta = 0$ et $\theta_\alpha = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ $n \in \mathbb{Z}$, ce qui implique d'après (2.2.9), et (2.2.10) que $K = H = 0$ et le point P est aussi un point planaire, ($\kappa_1 = \kappa_2 = 0$).
- (iv) Si $\theta_\alpha = \theta_\beta = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ $n \in \mathbb{Z}$, alors d'après (2.2.9), et (2.2.10) $K = H = 0$, ($\kappa_1 = \kappa_2 = 0$).

Théorème 2.3.4. *Si la surface X n'est pas une surface développable alors il n'y a pas des points ombilicaux sur cette surface dans l'espace 3-euclidien.*

Démonstration. *Si la surface X n'est pas développable, alors $K \neq 0$ et d'après ce qui précède il n'y a pas des points ombilicaux sur cette surface.*

Définition 2.3.5. *Les points singuliers de la surface de translation X sont les points tels que*

$$X_u \wedge X_v = 0.$$

Théorème 2.3.6. *Le point $X(u_0, v_0)$ de la surface de translation $X(u, v)$ est un point singulier si et seulement si*

$$\sin[\phi(u_0, v_0)] = 0.$$

Démonstration. *En effet, on a :*

$$\|X_u \wedge X_v\| = \|X_u\| \|X_v\| \sin[\phi(u, v)].$$

Théorème 2.3.7. *Si le point $X(u_0, v_0)$ de la surface de translation $X(u, v)$ est un point singulier, alors l'angle entre les vecteurs tangents de $\alpha(u_0)$ et $\beta(v_0)$ est égale à $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. *Soit $X(u_0, v_0)$ un point singulier de la surface de translation (2.2.1) donc d'après le théorème (2.3.6) on a $\sin[\phi(u_0, v_0)] = 0$.*

Si $\sin[\phi(u_0, v_0)] = 0$, alors $\phi(u_0, v_0) = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, ainsi l'angle entre les vecteurs tangents des courbes génératrices α et β vaut $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2.3.8. *Soit S la surface de translation (qui n'est pas minimale) définie par (2.2.1) où α et β sont deux hélices circulaires :*

$$\alpha(u) = \left(\sin\left[\frac{u}{2}\right], \cos\left[\frac{u}{2}\right] - 1, \frac{\sqrt{3}u}{2} \right),$$

$$\beta(v) = \left(\cos\left[\frac{v}{3}\right] - 1, \sin\left[\frac{v}{3}\right], \frac{2\sqrt{2}v}{3} \right).$$

En calculant les dérivées partielles par rapport à u et v , on obtient :

$$X_u = \left(\frac{1}{2} \cos \frac{u}{2}, -\frac{1}{2} \sin \frac{u}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$X_{uu} = -\frac{1}{4} \left(\sin \frac{u}{2}, \cos \frac{u}{2}, 0 \right).$$

De même

$$X_v = \left(-\frac{1}{3} \sin \frac{v}{3}, \frac{1}{3} \cos \frac{v}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right),$$

$$X_{vv} = -\frac{1}{9} \left(\cos \frac{v}{3}, \sin \frac{v}{3}, 0 \right).$$

Les composantes de première forme fondamentale de cette surface sont données par :

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6} \sin \left[\frac{3u+2v}{6} \right],$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1.$$

Alors, le vecteur normal unitaire de cette surface de translation est donné par :

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$$

$$N(u, v) = \frac{-4 \sin \frac{u}{2} - \sqrt{6} \cos \frac{u}{3}, -4 \cos \frac{u}{2} - \sqrt{6} \sin \frac{v}{3}, \sqrt{2} \cos \left[\frac{3u+2v}{6} \right]}{\sqrt{23 + \cos \left[\frac{3u+2v}{3} \right] + 8\sqrt{6} \sin \left[\frac{3u+2v}{6} \right]}}$$

Les composantes de la deuxième forme fondamentale sont données par :

$$l = \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{4 + \sqrt{6} \sin \left[\frac{3u+2v}{6} \right]}{4 \sqrt{23 + \cos \left[\frac{3u+2v}{3} \right] + 8\sqrt{6} \sin \left[\frac{3u+2v}{6} \right]}},$$

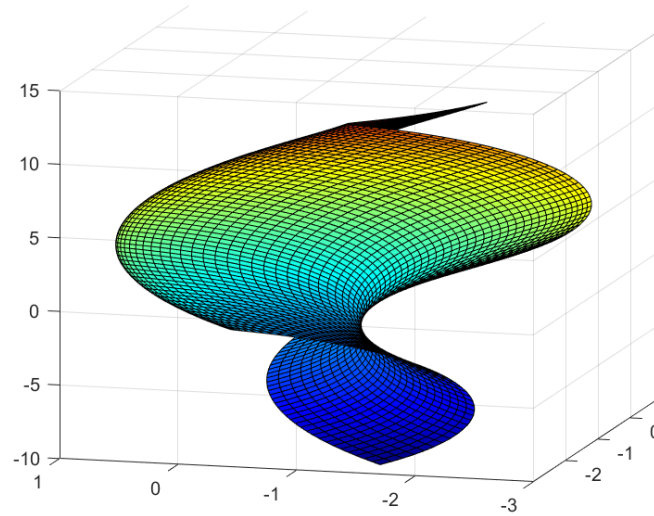
$$m = \langle X_{uv}, N \rangle = 0,$$

$$n = \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{\sqrt{6} + 4 \sin \left[\frac{3u+2v}{6} \right]}{9 \sqrt{23 + \cos \left[\frac{3u+2v}{3} \right] + 8\sqrt{6} \sin \left[\frac{3u+2v}{6} \right]}}.$$

A l'origine, on obtient :

$$E = G = 1, \quad F = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad l = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \quad m = 0, \quad n = \frac{1}{18}.$$

Puisque on a $ln - m^2 > 0$, ainsi que $K > 0$, alors l'origine est un point elliptique.



Exemple 2.3.9. Soit la surface de translation S , un cylindre défini par (2.2.1), tel que l'une de ses génératrices est un cercle de rayon a et l'autre est une droite perpendiculaire au plan du cercle. Ces deux courbes peuvent s'écrire ainsi :

$$\alpha(u) = (a \cos(u), a \sin(u), 0),$$

$$\beta(v) = (0, 0, v).$$

Pour ces courbes, on peut facilement obtenir ce qui suit

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle (-a \sin(u), a \cos(u), 0), (-a \sin(u), a \cos(u), 0) \rangle = a^2,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle (-a \sin(u), a \cos(u), 0), (0, 0, 1) \rangle = 0,$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 1,$$

et

$$\begin{aligned} l &= \langle X_{uu}, N \rangle \\ &= \langle (-a \cos(u), -a \sin(u), 0), (\cos(u), \sin(u), 0) \rangle = a, \end{aligned}$$

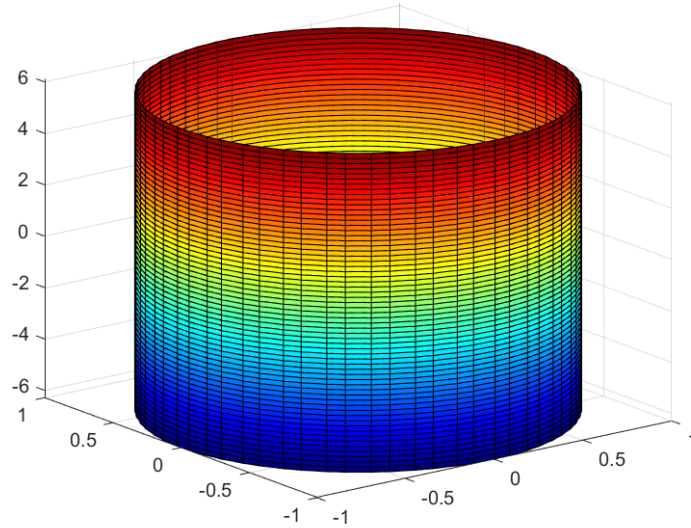
$$m = \langle X_{uv}, N \rangle = 0,$$

$$n = \langle X_{vv}, N \rangle = 0.$$

Il s'en suit

$$K = 0, \quad H = -\frac{1}{2a}, \quad \kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{a}.$$

Puisque on a $ln - m^2 = 0$ et $l^2 + m^2 + n^2 > 0$, alors, tous les points du cylindre sont des points paraboliques.



Exemple 2.3.10. Soit S une surface translatée de l'espace euclidien \mathbb{E}^3 , alors S s'écrit comme

$$X(u, v) = \alpha(u) + \beta(v),$$

avec les courbes génératrices

$$\alpha(u) = (u^3, 0, 0), \quad u \in [-1, 1],$$

$$\beta(v) = (0, v^3, 0), \quad v \in [-1, 1].$$

En calculant les dérivées partielles de (2.2.1) par rapport à u et v respectivement, on obtient

$$X_u = (3u^2, 0, 0),$$

$$X_v = (0, 3v^2, 0).$$

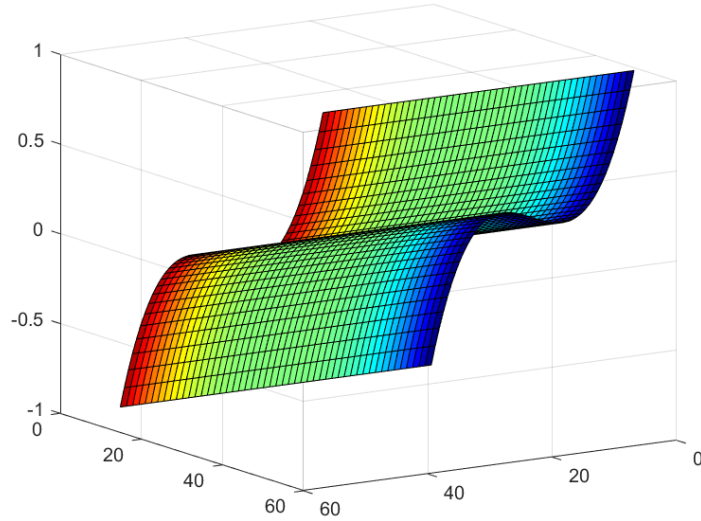
Alors

$$X_u \wedge X_v = (0, 0, 9u^2v^2).$$

A l'origine, par un simple calcul, on peut obtenir :

$$X_u \wedge X_v = (0, 0, 0).$$

Puisque $X_u \wedge X_v = 0$, l'origine est donc un point singulier.



Exemple 2.3.11. La surface de Scherk, obtenue par H. Scherk en 1834, est la seule surface minimale non développable pouvant être présentée comme une surface de translation de type planaire. La surface de Scherk est donnée par (2.2.1) avec des courbes génératrices définies par :

$$\alpha(u) = \left(u, 0, -\frac{1}{a} \log[\cos[au]] \right),$$

$$\beta(v) = \left(0, v, \frac{1}{a} \log[\cos[av]] \right).$$

Pour les courbes génératrices, on a

$$\begin{cases} t_\alpha = (\cos[au], 0, \sin[au]), & t_\beta = (0, \cos[av], -\sin[av]), \\ n_\alpha = (-\sin[au], 0, \cos[au]), & n_\beta = -(0, \sin[av], \cos[av]), \\ b_\alpha = (0, -1, 0), & b_\beta = (-1, 0, 0). \end{cases}$$

Alors, le vecteur normal unitaire est donné par

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ N(u, v) &= \frac{(\cos[au], 0, \sin[au]) \wedge (0, \cos[av], -\sin[av])}{\|(\cos[au], 0, \sin[au]) \wedge (0, \cos[av], -\sin[av])\|} \\ &= \frac{(-\sin[au] \cos[av], \cos[au] \sin[av], \cos[au] \cos[av])}{\sin[\phi(u, v)]}, \end{aligned}$$

avec

$$\sin[\phi(u, v)] = \sqrt{1 - \sin^2[au] \sin^2[av]}.$$

D'autre part, les composantes E , F et G de la première forme fondamentale et l , m et n de la deuxième forme fondamentale sont données par

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = \frac{1}{\cos^2[au]} \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = -\tan[au]\tan[av], \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = \frac{1}{\cos^2[av]}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} l &= \langle X_{uu}, N \rangle \\ &= \frac{a}{\cos^2[au] \sqrt{\frac{1}{\cos^2[av]} + \tan^2[au]}}, \end{aligned}$$

$$m = \langle X_{uv}, N \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned} n &= \langle X_{vv}, N \rangle \\ &= \frac{-a}{\cos^2[av] \sqrt{\frac{1}{\cos^2[av]} + \tan^2[au]}}. \end{aligned}$$

Il s'en suit que la courbure gaussienne de la surface de Scherk est :

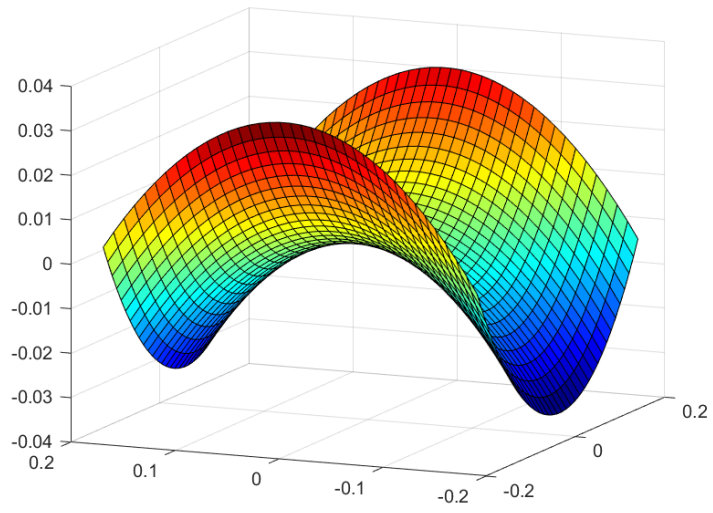
$$K = - \left(\frac{a \cos[au] \cos[av]}{1 - \sin^2[au] \sin^2[av]} \right)^2.$$

Et La courbure moyenne est nulle, c'est-à-dire $H = 0$.

A l'origine, nous avons

$$E = G = 1, \quad F = 0, \quad l = -n = a, \quad m = 0, \quad K = -a^2.$$

Puisque la courbure gaussienne est négative à l'origine $K < 0$, alors l'origine est un point hyperbolique.



CHAPITRE 3

SURFACES DE TRANSLATION GÉNÉRÉES PAR DES INDICATRICES SPHÉRIQUES DE COURBES RÉGULIÈRES

Notons par \mathbb{E}^3 un espace euclidien à 3 dimensions et par $u \rightarrow \alpha(u)$ et $v \rightarrow \beta(v)$ des courbes non dégénérées paramétrisées par longueur d'arc. Désignons par $\{t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha, \kappa_\alpha, \tau_\alpha\}$ et $\{t_\beta, n_\beta, b_\beta, \kappa_\beta, \tau_\beta\}$ les invariants de Frenet des courbes α et β , respectifs.

Dans ce chapitre, on définit les surfaces de translation générées par les indicatrices tangentes, respectivement les indicatrices normales principales et les indicatrices binormales des courbes α et β on détermine quelques-unes de leurs caractérisations.

3.1 Surfaces de translation générées par les indicatrices tangentes de courbes régulières de \mathbb{E}^3

La surface de translation engendrée par les indicatrices tangentes des courbes α et β est définie par :

$$M_1 : X(u, v) = t_\alpha(u) + t_\beta(v). \quad (3.1.1)$$

En calculant les dérivées partielles par rapport à u et v de la surface de translation donnée par la paramétrisation (3.1.1), on obtient :

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial X(u, v)}{\partial u} \\ &= t'_\alpha(u) \end{aligned}$$

$$= \kappa_\alpha n_\alpha,$$

$$\begin{aligned} X_v &= \frac{\partial X(u, v)}{\partial v} \\ &= t'_\beta(v) \\ &= \kappa_\beta n_\beta. \end{aligned}$$

Ainsi, les composantes de la première forme fondamentale de la surface M_1 sont :

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle \kappa_\alpha n_\alpha, \kappa_\alpha n_\alpha \rangle = \kappa_\alpha^2, \quad (3.1.2)$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle \kappa_\alpha n_\alpha, \kappa_\beta n_\beta \rangle = \kappa_\alpha \kappa_\beta \cos[\phi(u, v)], \quad (3.1.3)$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \langle \kappa_\beta n_\beta, \kappa_\beta n_\beta \rangle = \kappa_\beta^2, \quad (3.1.4)$$

où $\phi = \phi(u, v)$ est la fonction d'angle entre n_α et n_β . Alors, le vecteur normal unitaire de la surface de translation M_1 est donné par :

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta (n_\alpha \wedge n_\beta)}{\|\kappa_\alpha \kappa_\beta (n_\alpha \times n_\beta)\|} \\ &= \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta (n_\alpha \wedge n_\beta)}{\kappa_\alpha \kappa_\beta \|n_\alpha\| \|n_\beta\| \sin[\phi(u, v)]} \\ &= \frac{n_\alpha \wedge n_\beta}{\sin[\phi(u, v)]} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Comme la surface M_1 est régulière, on a $\sin[\phi(u, v)] \neq 0$.

Le vecteur normal principal de la courbe α peut être exprimé comme une combinaison linéaire de $\{t_\beta, n_\beta, b_\beta\}$ comme :

$$n_\alpha = \mu_1 t_\beta + \mu_2 n_\beta + \mu_3 b_\beta. \quad (3.1.6)$$

On a $\phi = \phi(u, v)$ la fonction d'angle entre n_α et n_β . Notons par $\gamma = \gamma(u, v)$ la fonction d'angle entre t_β et la projection de n_α sur le plan $\{t_\beta, b_\beta\}$.

D'après la figure 1 ci-dessous, on a :

$$\cos[\phi(u, v)] = \frac{\mu_2}{r} \implies \mu_2 = r \cos[\phi(u, v)] \implies \mu_2 = \cos[\phi(u, v)]$$

car

$$r = \|n_\alpha\| = 1,$$

et

$$\sin[\phi(u, v)] = \frac{l}{r} \implies l = r \sin[\phi(u, v)].$$

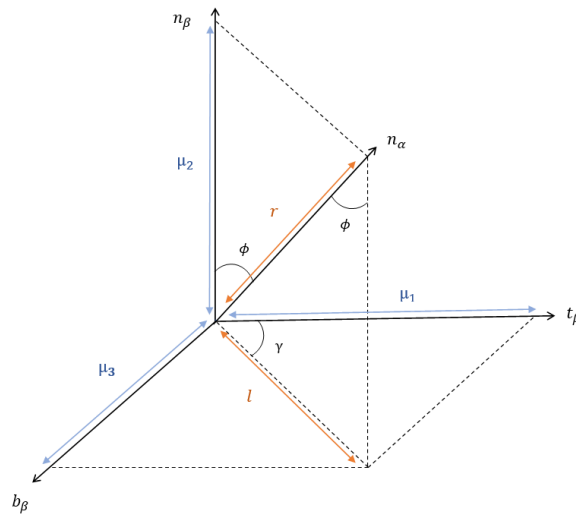


Figure 1

D'autre part

$$\cos[\gamma(u, v)] = \frac{\mu_1}{l} \implies \mu_1 = l \cos[\gamma(u, v)],$$

$$\sin[\gamma(u, v)] = \frac{\mu_3}{l} \implies \mu_3 = l \sin[\gamma(u, v)].$$

On en déduit

$$\mu_1 = \langle n_\alpha, t_\beta \rangle = \sin[\phi(u, v)] \cos[\gamma(u, v)],$$

$$\mu_2 = \langle n_\alpha, n_\beta \rangle = \cos[\phi(u, v)],$$

$$\mu_3 = \langle n_\alpha, b_\beta \rangle = \sin[\phi(u, v)] \sin[\gamma(u, v)]. \quad (3.1.7)$$

De même, le vecteur normal principal de la courbe β peut être exprimé comme une combinaison linéaire de $\{t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha\}$ comme :

$$n_\beta = \lambda_1 t_\alpha + \lambda_2 n_\alpha + \lambda_3 b_\alpha, \quad (3.1.8)$$

avec

$$\lambda_1 = \langle n_\beta, t_\alpha \rangle = \sin[\phi(u, v)] \cos[\theta(u, v)],$$

$$\lambda_2 = \langle n_\beta, n_\alpha \rangle = \cos[\phi(u, v)],$$

$$\lambda_3 = \langle n_\beta, b_\alpha \rangle = \sin[\phi(u, v)] \sin[\theta(u, v)], \quad (3.1.9)$$

où $\theta = \theta(u, v)$ est la fonction d'angle entre t_α et la projection de n_β sur le plan $\{t_\alpha, b_\alpha\}$.

Donc on peut obtenir le vecteur normal unitaire N de la surface M_1 de deux manières

différentes.

Soit

$$N(u, v) = \frac{n_\alpha \wedge n_\beta}{\sin[\phi(u, v)]},$$

en utilisant (3.1.8) et (3.1.9), et en notant par N_1 le vecteur N , il vient :

$$\begin{aligned} N_1(u, v) &= \frac{n_\alpha \wedge (\lambda_1 t_\alpha + \lambda_2 n_\alpha + \lambda_3 b_\alpha)}{\sin[\phi(u, v)]} \\ &= \frac{\lambda_3 t_\alpha - \lambda_1 b_\alpha}{\sin[\phi(u, v)]} \\ &= \frac{\sin[\phi(u, v)] \sin[\theta(u, v)] t_\alpha - \sin[\phi(u, v)] \cos[\theta(u, v)] b_\alpha}{\sin[\phi(u, v)]} \\ &= \sin[\theta(u, v)] t_\alpha - \cos[\theta(u, v)] b_\alpha. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

De même en utilisant (3.1.6) et (3.1.7), et en notant cette fois ci par N_2 le vecteur N , il vient :

$$\begin{aligned} N_2(u, v) &= \frac{(\mu_1 t_\beta + \mu_2 n_\beta + \mu_3 b_\beta) \wedge n_\beta}{\sin[\phi(u, v)]} \\ &= \frac{-\mu_3 t_\beta + \mu_1 b_\beta}{\sin[\phi(u, v)]} \\ &= \frac{-\sin[\phi(u, v)] \sin[\gamma(u, v)] t_\beta + \sin[\phi(u, v)] \cos[\gamma(u, v)] b_\beta}{\sin[\phi(u, v)]} \\ &= -\sin[\gamma(u, v)] t_\beta + \cos[\gamma(u, v)] b_\beta. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

En calculant les dérivées partielles secondes de $X(u, v)$, on trouve :

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \frac{\partial^2 X(u, v)}{\partial u^2} \\ &= (\kappa_\alpha n_\alpha)' \\ &= \kappa'_\alpha n_\alpha + \kappa_\alpha n'_\alpha \\ &= \kappa'_\alpha n_\alpha + \kappa_\alpha (-\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha) \\ &= -\kappa_\alpha^2 t_\alpha + \kappa'_\alpha n_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha b_\alpha, \end{aligned}$$

$$X_{uv} = X_{vu} = 0,$$

$$X_{vv} = \frac{\partial^2 X(u, v)}{\partial v^2}$$

$$\begin{aligned}
&= (\kappa_\beta n_\beta)' \\
&= \kappa'_\beta n_\beta + \kappa_\beta n'_\beta \\
&= \kappa'_\beta n_\beta + \kappa_\beta (-\kappa_\beta t_\beta + \tau_\beta b_\beta) \\
&= -\kappa_\beta^2 t_\beta + \kappa'_\beta n_\beta + \kappa_\beta \tau_\beta b_\beta.
\end{aligned}$$

Les composantes de la deuxième forme fondamentale de la surface M_1 sont :

$$\begin{aligned}
l &= \langle X_{uu}, N \rangle \\
&= \langle X_{uu}, N_1 \rangle \\
&= \left\langle -\kappa_\alpha^2 t_\alpha + \kappa'_\alpha n_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha b_\alpha, \sin[\theta(u, v)]t_\alpha - \cos[\theta(u, v)]b_\alpha \right\rangle \\
&= -\kappa_\alpha^2 \left[\cos[\theta(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u, v)] \right], \tag{3.1.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m &= \langle X_{uv}, N \rangle \\
&= 0, \tag{3.1.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n &= \langle X_{vv}, N \rangle \\
&= \langle X_{vv}, N_2 \rangle \\
&= \left\langle -\kappa_\beta^2 t_\beta + \kappa'_\beta n_\beta + \kappa_\beta \tau_\beta b_\beta, -\sin[\gamma(u, v)]t_\beta + \cos[\gamma(u, v)]b_\beta \right\rangle \\
&= \kappa_\beta^2 \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u, v)] \right]. \tag{3.1.14}
\end{aligned}$$

Proposition 3.1.1. *La courbure gaussienne K et la courbure moyenne H de la surface de translation M_1 sont respectivement :*

$$K = -\frac{\left[\cos[\theta(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u, v)] \right] \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u, v)] \right]}{\sin^2[\phi(u, v)]}, \tag{3.1.15}$$

$$H = \frac{-\left[\cos[\theta(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u, v)] \right] + \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u, v)] \right]}{2 \sin^2[\phi(u, v)]}. \tag{3.1.16}$$

Démonstration. *On a*

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}.$$

En utilisant (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4), (3.1.12), (3.1.14) et (3.1.13), on obtient :

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{\kappa_\alpha^2 \kappa_\beta^2 \left[\cos[\theta(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u, v)] \right] \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u, v)] \right]}{\kappa_\alpha^2 \kappa_\beta^2 - \kappa_\alpha^2 \kappa_\beta^2 \cos^2[\phi(u, v)]} \\
&= -\frac{\left[\cos[\theta(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u, v)] \right] \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u, v)] \right]}{1 - \cos^2[\phi(u, v)]} \\
&= -\frac{\left[\cos[\theta(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u, v)] \right] \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u, v)] \right]}{\sin^2[\phi(u, v)]}.
\end{aligned}$$

On a

$$H = \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)}.$$

En utilisant (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4), (3.1.12), (3.1.14) et (3.1.13), on obtient :

$$\begin{aligned}
H &= \frac{-\kappa_\beta^2 \kappa_\alpha^2 \left[\cos[\theta(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u, v)] \right] + \kappa_\alpha^2 \kappa_\beta^2 \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u, v)] \right]}{2(\kappa_\alpha^2 \kappa_\beta^2 - \kappa_\alpha^2 \kappa_\beta^2 \cos^2[\phi(u, v)])} \\
&= \frac{-\left[\cos[\theta(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u, v)] \right] + \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u, v)] \right]}{2(1 - \cos^2[\phi(u, v)])} \\
&= \frac{-\left[\cos[\theta(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u, v)] \right] + \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u, v)] \right]}{2 \sin^2[\phi(u, v)]}.
\end{aligned}$$

Théorème 3.1.2. Si la surface M_1 est développable, alors

$$\cos[\theta(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u, v)] = 0 \quad \text{ou} \quad \cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u, v)] = 0. \quad (3.1.17)$$

Démonstration. Si la surface M_1 est développable, sa courbure gaussienne est nulle i.e. $K = 0$.

Théorème 3.1.3. Si la surface M_1 est développable, alors l'angle $\theta[(u, v)]$ est une fonction qui ne dépend que de u ou l'angle $\gamma[(u, v)]$ est une fonction qui ne dépend que de v .

Démonstration. Si la surface M_1 est développable, alors (3.1.17) est vérifié.

$$\text{Si} \quad \cos[\theta(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u, v)] = 0, \quad \text{alors} \quad \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = -\frac{\sin[\theta(u, v)]}{\cos[\theta(u, v)]} = -\tan[\theta(u, v)],$$

et par suite l'angle $\theta(u, v)$ est une fonction de u .

De même

$$\text{Si } \cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u, v)] = 0, \text{ alors } \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = - \frac{\sin[\gamma(u, v)]}{\cos[\gamma(u, v)]} = - \tan[\gamma(u, v)],$$

et l'angle $\gamma(u, v)$ est une fonction de v .

Théorème 3.1.4. *Si la surface M_1 est développable et si les courbes α et β sont des hélices, alors l'un des angles θ ou γ est constant.*

Remarque 3.1.5. *l'hélice est une courbe dont la tangente en chaque point fait un angle constant avec une direction donnée et est caractérisée par le rapport torsion courbure $\frac{\tau}{\kappa}$ constant.*

Démonstration. *On suppose que la surface M_1 est développable, alors l'équation (3.1.17) est satisfaite.*

$$\text{Si } \cos[\theta(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u, v)] = 0, \text{ alors } \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = - \frac{\sin[\theta(u, v)]}{\cos[\theta(u, v)]} = - \tan[\theta(u, v)],$$

et alors $\tan[\theta(u, v)]$ est constante et cela implique que θ est constant.

De même

$$\text{Si } \cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u, v)] = 0, \text{ alors } \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = - \frac{\sin[\gamma(u, v)]}{\cos[\gamma(u, v)]} = - \tan[\gamma(u, v)],$$

et si β est une hélice, $\tan[\gamma(u, v)]$ est constante et cela implique que γ est constant.

Théorème 3.1.6. *Si la surface M_1 est développable et si les courbes α et β sont des courbes planes alors les angles $\theta = \pi k$ ou $\gamma = \pi k$, ($k \in \mathbb{Z}$).*

Démonstration. *Si α et β sont des courbes planes, alors $\tau_\alpha = 0$ et $\tau_\beta = 0$. Comme on suppose M_1 développable, on obtient d'après (3.1.17) que :*

$$\sin[\theta(u, v)] = 0 \text{ ou } \sin[\gamma(u, v)] = 0.$$

Si $\sin[\theta(u, v)] = 0$, alors $\theta = \pi k$, ($k \in \mathbb{Z}$). et si $\sin[\gamma(u, v)] = 0$, alors $\gamma = \pi k$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Théorème 3.1.7. *Si la surface M_1 est développable, et si les courbes α et β sont des hélices, alors la surface M_1 est une surface d'angle constant.*

Démonstration. *On suppose que la surface M_1 est développable et que les courbes α et β sont des hélices. D'après le théorème (3.1.4), $\gamma = \gamma_0$ ou $\theta = \theta_0$ sont des angles constants.*

Sans perdre en généralité, on suppose que θ est constant.

Puisque α est une hélice, alors il existe une direction constante unitaire u_α qui fait un angle constant avec le vecteur tangent unitaire t_α de la courbe α . Alors

$$\langle t_\alpha, u_\alpha \rangle = \cos \delta_0 = \text{constante}$$

On peut donc définir u_α comme suit

$$u_\alpha = \cos \delta_0 t_\alpha + \sin \delta_0 b_\alpha. \quad (3.1.18)$$

En utilisant (3.1.10) et (3.1.18), on obtient

$$\begin{aligned} \langle N_1, u_\alpha \rangle &= \langle \sin \theta_0 t_\alpha - \cos \theta_0 b_\alpha, \cos \delta_0 t_\alpha + \sin \delta_0 b_\alpha \rangle \\ &= \sin \theta_0 \cos \delta_0 - \cos \theta_0 \sin \delta_0 \\ &= \text{constante.} \end{aligned}$$

D'après la définition (1.2.5), la démonstration est achevée.

Théorème 3.1.8. Si la surface M_1 est minimale, alors

$$\cos[\theta(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\theta(u, v)] = \cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\gamma(u, v)]$$

Démonstration. Si la surface M_1 est minimale, sa courbure moyenne est nulle, i.e. $H = 0$.

Exemple 3.1.9. Soient α et β des courbes de \mathbb{E}^3 définies par :

$$\alpha(u) = \left(\cos \left[\frac{u}{\sqrt{5}} \right], \frac{2u}{\sqrt{5}}, \sin \left[\frac{u}{\sqrt{5}} \right] \right),$$

$$\beta(v) = \frac{1}{2} \left(v + \sqrt{1+v^2}, (v + \sqrt{1+v^2})^{-1}, \sqrt{2} \ln(v + \sqrt{1+v^2}) \right),$$

où α et β sont des courbes paramétrées par longueur d'arc. En calculant les indicatrices tangentes de la courbe α et β , on obtient :

$$t_\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\sin \left[\frac{u}{\sqrt{5}} \right], 2, \cos \left[\frac{u}{\sqrt{5}} \right] \right),$$

$$t_\beta(v) = \left(\frac{v + \sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1+v^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+v^2}(v + \sqrt{1+v^2})}, \frac{\cos \left[\frac{u}{\sqrt{5}} \right]}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+v^2}} \right).$$

La surface de translation engendrée par les indicatrices tangentes t_α et t_β des courbes α et β est donnée par :

$$M_1(u, v) = t_\alpha(u) + t_\beta(v).$$

Il s'en suit

$$M_1(u, v) = \left(-\frac{\sin \left[\frac{u}{\sqrt{5}} \right]}{\sqrt{5}} + \frac{v + \sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2\sqrt{1+v^2}(v + \sqrt{1+v^2})}, \frac{\cos \left[\frac{u}{\sqrt{5}} \right]}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+v^2}} \right).$$

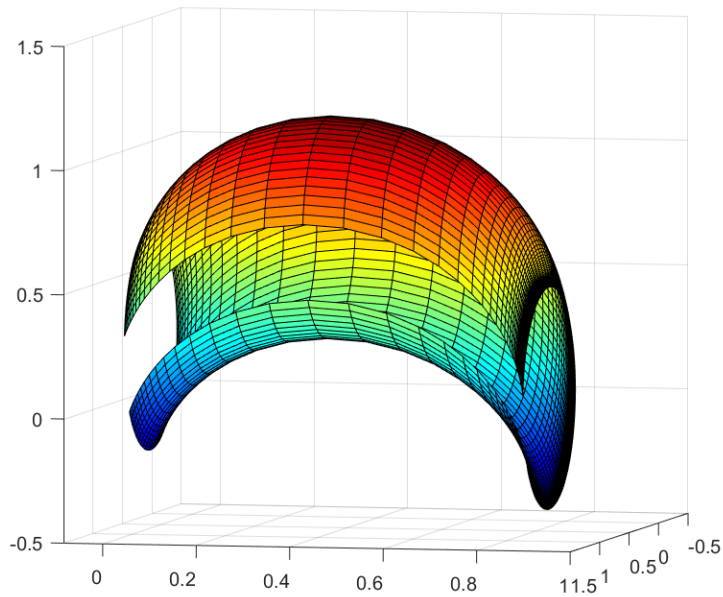


Figure 3.1. Surface de translation g n r e par les indicatrices tangentes des courbes spatiales

3.2 Surfaces de translation générées par les indicatrices normales principales de courbes régulières de \mathbb{E}^3

La surface de translation engendr e par les indicatrices normales principales des courbes α et β de \mathbb{E}^3 est définie par :

$$M_2 : X(u, v) = n_\alpha(u) + n_\beta(v). \quad (3.2.1)$$

En calculant les dérivées partielles par rapport à u et v de la surface de translation donn e par la paramétrisation (3.2.1), on obtient :

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial X(u, v)}{\partial u} \\ &= n'_\alpha(u) \\ &= -\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} X_v &= \frac{\partial X(u, v)}{\partial v} \\ &= n'_\beta(v) \\ &= -\kappa_\beta t_\beta + \tau_\beta b_\beta. \end{aligned}$$

Les champs de vecteurs de Frenet de la courbe α peuvent être écrits comme une combinaison linéaire de t_β , n_β et b_β comme suit :

$$t_\alpha = \lambda_1 t_\beta + \lambda_2 n_\beta + \lambda_3 b_\beta \quad (3.2.2)$$

$$n_\alpha = \lambda_4 t_\beta + \lambda_5 n_\beta + \lambda_6 b_\beta \quad (3.2.3)$$

$$b_\alpha = \lambda_7 t_\beta + \lambda_8 n_\beta + \lambda_9 b_\beta \quad (3.2.4)$$

De même, Les champs de vecteurs de Frenet de la courbe β peuvent être écrits comme une combinaison linéaire de t_α , n_α et b_α comme suit :

$$t_\beta = \lambda_1 t_\alpha + \lambda_4 n_\alpha + \lambda_7 b_\alpha \quad (3.2.5)$$

$$n_\beta = \lambda_2 t_\alpha + \lambda_5 n_\alpha + \lambda_8 b_\alpha \quad (3.2.6)$$

$$b_\beta = \lambda_3 t_\alpha + \lambda_6 n_\alpha + \lambda_9 b_\alpha \quad (3.2.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle t_\alpha, t_\beta \rangle &= \lambda_1, & \langle t_\alpha, n_\beta \rangle &= \lambda_2, & \langle t_\alpha, b_\beta \rangle &= \lambda_3, \\ \langle n_\alpha, t_\beta \rangle &= \lambda_4, & \langle n_\alpha, n_\beta \rangle &= \lambda_5, & \langle n_\alpha, b_\beta \rangle &= \lambda_6, \\ \langle b_\alpha, t_\beta \rangle &= \lambda_7, & \langle b_\alpha, n_\beta \rangle &= \lambda_8, & \langle b_\alpha, b_\beta \rangle &= \lambda_9. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Par conséquent, les composantes de la première forme fondamentale de la surface M_2 sont :

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ &= \langle -\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha, -\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha \rangle \\ &= \kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$\begin{aligned} F &= \langle X_u, X_v \rangle \\ &= \langle -\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha, -\kappa_\beta t_\beta + \tau_\beta b_\beta \rangle \\ &= \kappa_\alpha \kappa_\beta \langle t_\alpha, t_\beta \rangle - \kappa_\alpha \tau_\beta \langle t_\alpha, b_\beta \rangle - \kappa_\beta \tau_\alpha \langle b_\alpha, t_\beta \rangle + \tau_\alpha \tau_\beta \langle b_\alpha, b_\beta \rangle \\ &= \kappa_\alpha \kappa_\beta \lambda_1 - \kappa_\alpha \tau_\beta \lambda_3 + \kappa_\beta \tau_\alpha \lambda_7 + \tau_\alpha \tau_\beta \lambda_9 \\ &= \kappa_\alpha \kappa_\beta \left(\lambda_1 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_3 \right) - \kappa_\beta \tau_\alpha \left(\lambda_7 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_9 \right), \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

$$\begin{aligned} G &= \langle X_v, X_v \rangle \\ &= \langle -\kappa_\beta t_\beta + \tau_\beta b_\beta, -\kappa_\beta t_\beta + \tau_\beta b_\beta \rangle \end{aligned}$$

$$= \kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2. \quad (3.2.11)$$

Le vecteur normal unitaire de la surface de translation M_2 est :

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{(-\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha) \wedge (-\kappa_\beta t_\beta + \tau_\alpha b_\beta)}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta (t_\alpha \wedge t_\beta) - \kappa_\alpha \tau_\beta (t_\alpha \wedge b_\beta) - \tau_\alpha \kappa_\beta (b_\alpha \wedge t_\beta) + \tau_\alpha \tau_\beta (b_\alpha \wedge b_\beta)}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \left[(t_\alpha \wedge t_\beta) - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} (t_\alpha \wedge b_\beta) \right] - \tau_\alpha \kappa_\beta \left[(b_\alpha \wedge t_\beta) - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} (b_\alpha \wedge b_\beta) \right]}{\sqrt{EG - F^2}}, \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

avec

$$EG - F^2 = (\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) - \left[\kappa_\alpha \kappa_\beta (\lambda_1 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_3) - \tau_\alpha \kappa_\beta (\lambda_7 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_9) \right]^2.$$

En utilisant (3.2.5), (3.2.7) et (3.2.12), le vecteur normal unitaire de la surface M_2 peut être exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} N_1(u, v) &= \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \left[(t_\alpha \wedge (\lambda_1 t_\alpha + \lambda_4 n_\alpha + \lambda_7 b_\alpha)) - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} (t_\alpha \wedge (\lambda_3 t_\alpha + \lambda_6 n_\alpha + \lambda_9 b_\alpha)) \right]}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &\quad - \frac{\tau_\alpha \kappa_\beta \left[(b_\alpha \wedge (\lambda_1 t_\alpha + \lambda_4 n_\alpha + \lambda_7 b_\alpha)) - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} (b_\alpha \wedge (\lambda_3 t_\alpha + \lambda_6 n_\alpha + \lambda_9 b_\alpha)) \right]}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \left[(-\lambda_7 n_\alpha + \lambda_4 b_\alpha) - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} (-\lambda_9 n_\alpha + \lambda_6 b_\alpha) - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} (-\lambda_4 t_\alpha + \lambda_1 n_\alpha) + \frac{\tau_\alpha \tau_\beta}{\kappa_\alpha \kappa_\alpha} (-\lambda_6 t_\alpha + \lambda_3 n_\alpha) \right]}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \left[\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} (\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_6) t_\alpha - [(\lambda_7 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_9) + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} (\lambda_1 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_3)] n_\alpha + (\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_6) b_\alpha \right]}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned}$$

Et en utilisant (3.2.2), (3.2.4) et (3.2.12), le vecteur normal unitaire de la surface M_2 est exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} N_2(u, v) &= \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \left[((\lambda_1 t_\beta + \lambda_2 n_\beta + \lambda_3 b_\beta) \wedge t_\beta) - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} ((\lambda_1 t_\beta + \lambda_2 n_\beta + \lambda_3 b_\beta) \wedge b_\beta) \right]}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &\quad - \frac{\tau_\alpha \kappa_\beta \left[((\lambda_7 t_\beta + \lambda_3 n_\beta + \lambda_9 b_\beta) \wedge t_\beta) - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} ((\lambda_7 t_\beta + \lambda_3 n_\beta + \lambda_9 b_\beta) \wedge b_\beta) \right]}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \left[(\lambda_3 n_\beta - \lambda_2 n_\beta) - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} (\lambda_2 t_\beta + \lambda_1 n_\beta) - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} (\lambda_9 n_\beta + \lambda_8 b_\beta) + \frac{\tau_\beta \tau_\alpha}{\kappa_\beta \kappa_\alpha} (\lambda_8 t_\beta + \lambda_7 n_\beta) \right]}{\sqrt{EG - F^2}} \\
&= \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \left[\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \lambda_8 - \lambda_2 \right) t_\beta + \left[\left(\lambda_3 + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \lambda_1 \right) - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} (\lambda_9 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_7) \right] n_\beta + \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \lambda_8 - \lambda_2 \right) b_\beta \right]}{\sqrt{EG - F^2}}.
\end{aligned}$$

En calculant les dérivées partielles secondes, on trouve :

$$\begin{aligned}
X_{uu} &= \frac{\partial^2 X(u, v)}{\partial u^2} \\
&= (-\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha)' \\
&= -\kappa'_\alpha t_\alpha - \kappa_\alpha t'_\alpha + \tau'_\alpha b_\alpha + \tau_\alpha b'_\alpha \\
&= -\kappa'_\alpha t_\alpha - (\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) n_\alpha + \tau'_\alpha b_\alpha,
\end{aligned}$$

$$X_{uv} = X_{vu} = 0,$$

$$\begin{aligned}
X_{vv} &= \frac{\partial^2 X(u, v)}{\partial v^2} \\
&= (-\kappa_\beta t_\beta + \tau_\beta b_\beta)' \\
&= -\kappa'_\beta t_\beta - \kappa_\beta t'_\beta + \tau'_\beta b_\beta + \tau_\beta b'_\beta \\
&= -\kappa'_\beta t_\beta - (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) n_\beta + \tau'_\beta b_\beta.
\end{aligned}$$

Par conséquent, les composantes de la deuxième forme fondamentale de la surface M_2 sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned}
l &= \langle X_{uu}, N \rangle = \langle X_{uu}, N_1 \rangle \\
&= \frac{\kappa_\beta \kappa_\alpha}{\sqrt{EG - F^2}} \left\langle -\kappa'_\alpha t_\alpha - (\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) n_\alpha + \tau'_\alpha b_\alpha, \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_6 \right) t_\alpha - \left[\left(\lambda_7 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_9 \right) + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\lambda_1 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_3 \right) \right] n_\alpha \right. \\
&\quad \left. + \left(\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_6 \right) b_\alpha \right\rangle \\
&= \frac{\kappa_\beta \kappa_\alpha}{\sqrt{EG - F^2}} \left(-\kappa'_\alpha \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_6 \right) + (\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) \left[\left(\lambda_7 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_9 \right) + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\lambda_1 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_3 \right) \right] + \tau'_\alpha \left(\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_6 \right) \right) \\
&= \frac{\kappa_\beta \kappa_\alpha}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\left(-\frac{\kappa'_\alpha \tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \tau'_\alpha \right) \left(\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_6 \right) - (\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) \left[\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_9 - \lambda_7 \right) + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_3 - \lambda_1 \right) \right] \right) \\
&= \frac{\kappa_\beta \kappa_\alpha}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\kappa_\alpha \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \right)' \left(\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_6 \right) - (\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) \left[\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_9 - \lambda_7 \right) + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_3 - \lambda_1 \right) \right] \right),
\end{aligned}$$

$$m = \langle X_{uv}, N \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned} n &= \langle X_{vv}, N \rangle = \langle X_{vv}, N_2 \rangle \\ &= \frac{\kappa_\beta \kappa_\alpha}{\sqrt{EG - F^2}} \left\langle -\kappa'_\beta t_\beta - (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) n_\beta + \tau'_\beta b_\beta, \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \lambda_8 - \lambda_2 \right) t_\beta + \left[\left(\lambda_3 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_1 \right) - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\lambda_9 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_7 \right) \right] n_\beta \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \lambda_8 - \lambda_2 \right) b_\beta \right\rangle \\ &= \frac{\kappa_\beta \kappa_\alpha}{\sqrt{EG - F^2}} \left(-\kappa'_\beta \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \lambda_8 - \lambda_2 \right) - (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \left[\left(\lambda_3 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_1 \right) - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\lambda_9 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_7 \right) \right] + \tau'_\beta \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \lambda_8 - \lambda_2 \right) \right) \\ &= \frac{\kappa_\beta \kappa_\alpha}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\left(-\frac{\kappa'_\beta \tau_\beta}{\kappa_\beta} + \tau'_\beta \right) \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \lambda_8 - \lambda_2 \right) - (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \left[\left(\lambda_3 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_1 \right) - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\lambda_9 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_7 \right) \right] \right) \\ &= -\frac{\kappa_\beta \kappa_\alpha}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\kappa_\beta \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \right)' \left(\lambda_2 - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \lambda_8 \right) + (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \left[\left(\lambda_3 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_1 \right) - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\lambda_9 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_7 \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Proposition 3.2.1. *La courbure gaussienne K et la courbure moyenne H de la surface de translation M_2 sont respectivement :*

$$K = -\frac{\kappa_\beta^2 \kappa_\alpha^2}{(\sqrt{EG - F^2})^4} \begin{pmatrix} \kappa_\alpha \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \right)' \left(\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_6 \right) \\ -(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_9 - \lambda_7 \right) \\ -(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_3 - \lambda_1 \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_\beta \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \right)' \left(\lambda_2 - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \lambda_8 \right) \\ +(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \left[\left(\lambda_3 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_1 \right) \right] \\ -(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\lambda_9 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_7 \right) \end{pmatrix},$$

$$H = \frac{\kappa_\beta \kappa_\alpha}{2(\sqrt{EG - F^2})^3} \begin{pmatrix} \kappa_\alpha \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \right)' (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \left(\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_6 \right) \\ -(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_9 - \lambda_7 \right) \\ -(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_3 - \lambda_1 \right) \\ -\kappa'_\beta \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \right)' (\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) \left(\lambda_2 - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \lambda_8 \right) \\ -(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \left[\left(\lambda_3 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_1 \right) \right] \\ +(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\lambda_9 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_7 \right) \end{pmatrix}.$$

Démonstration. *On a*

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = \frac{ln - m^2}{(\sqrt{EG - F^2})^2}$$

$$K = -\frac{\kappa_\beta^2 \kappa_\alpha^2}{(\sqrt{EG} - F^2)^4} \begin{pmatrix} \kappa_\alpha \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' \left(\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_6\right) \\ -(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_9 - \lambda_7\right) \\ -(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_3 - \lambda_1\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_\beta \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)' \left(\lambda_2 - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \lambda_8\right) \\ +(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \left[\left(\lambda_3 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_1\right)\right] \\ -(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\lambda_9 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_7\right) \end{pmatrix},$$

et

$$H = \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)} = \frac{En + Gl - 2Fm}{2(\sqrt{EG} - F^2)^2}$$

$$H = \frac{\kappa_\beta \kappa_\alpha}{2(\sqrt{EG} - F^2)^3} \begin{pmatrix} \kappa_\alpha \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \left(\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_6\right) \\ -(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_9 - \lambda_7\right) \\ -(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_3 - \lambda_1\right) \\ -\kappa_\beta' \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)' (\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) \left(\lambda_2 - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \lambda_8\right) \\ -(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \left[\left(\lambda_3 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_1\right)\right] \\ +(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\lambda_9 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_7\right) \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.2.2. Si la surface M_2 est développable, alors

$$\kappa_\alpha \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' \left(\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_6\right) - (\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) \left[\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_9 - \lambda_7\right) + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_3 - \lambda_1\right)\right] = 0$$

ou

$$\kappa_\beta \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)' \left(\lambda_2 - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \lambda_8\right) + (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \left[\left(\lambda_3 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_1\right) - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\lambda_9 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_7\right)\right] = 0$$

Démonstration. Si la surface M_2 est développable, sa courbure gaussienne est nulle i.e. $K = 0$.

Théorème 3.2.3. Si la surface M_2 est développable et si les courbes α et β sont des courbes planes, alors les vecteurs t_α et b_β ou les vecteurs b_α et t_β sont orthogonaux.

Démonstration. Soient α et β des courbes planes, alors $\tau_\alpha = 0$ et $\tau_\beta = 0$.
comme la surface M_2 est développable, on a

$$\kappa_\alpha^2 \lambda_7 = 0 \quad \text{ou} \quad \kappa_\beta^2 \lambda_3 = 0$$

Et Puisque $\kappa_\beta \neq 0$ et $\kappa_\alpha \neq 0$, on obtient que $\lambda_7 = 0$ ou $\lambda_3 = 0$.

Si $\lambda_3 = 0$, on trouve que $\langle t_\alpha, b_\beta \rangle = 0$, cela implique que les vecteurs t_α et b_β sont orthogonaux. De même, Si $\lambda_7 = 0$, on trouve que $\langle b_\alpha, t_\beta \rangle = 0$, qui implique que les vecteurs b_α et t_β sont orthogonaux.

Théorème 3.2.4. Si la surface M_2 est minimale, alors

$$\begin{pmatrix} \kappa_\alpha \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) (\lambda_4 - \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_6) \\ -(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_9 - \lambda_7\right) \\ -(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_3 - \lambda_1\right) \\ -\kappa_\beta' \left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)' (\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) \left(\lambda_2 - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \lambda_8\right) \\ -(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \left[\lambda_3 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_1\right] \\ +(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) (\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2) \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left(\lambda_9 + \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \lambda_7\right) \end{pmatrix} = 0.$$

Démonstration. Si la surface M_2 est minimale, sa courbure moyenne est nulle, i.e. $H = 0$.

Théorème 3.2.5. Si la surface M_2 est minimale et si α et β sont des courbes planes, alors l'angle entre t_α et b_β et l'angle entre b_α et t_β sont les mêmes.

Démonstration. Soient α et β des courbes planes, alors $\tau_\alpha = 0$ et $\tau_\beta = 0$.
Et comme la surface M_2 est minimale, on obtient :

$$\kappa_\alpha^2 \kappa_\beta^2 \lambda_7 - \kappa_\alpha^2 \kappa_\beta^2 \lambda_3 = 0,$$

d'où $\lambda_7 = \lambda_3$, et par suite,

$$\langle t_\alpha, b_\beta \rangle = \langle b_\alpha, t_\beta \rangle.$$

Exemple 3.2.6. Soient α et β des courbes de \mathbb{E}^3 définies par :

$$\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sqrt{1+u^2}, 2u, \ln(u + \sqrt{1+u^2}) \right),$$

$$\beta(v) = \left(\frac{5}{13} \cos[v], \frac{8}{13} - \sin[v], -\frac{12}{13} \cos[v] \right),$$

où α et β sont des courbes paramétrisées par longueur d'arc.

En calculant les indicatrices normales principales de la courbe α et β on trouve :

$$n_\alpha(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, 0, -\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right),$$

$$n_\beta(v) = \left(-\frac{5}{13} \cos[v], \sin[v], \frac{12}{13} \cos[v] \right).$$

Alors la surface de translation engendrée par les indicatrices normales n_α et n_β des courbes α et β est donnée par :

$$M_2(u, v) = n_\alpha(u) + n_\beta(v)$$

Il s'en suit

$$M_2(u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{5}{13} \cos[v], \sin[v], \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{12}{13} \cos[v] \right),$$

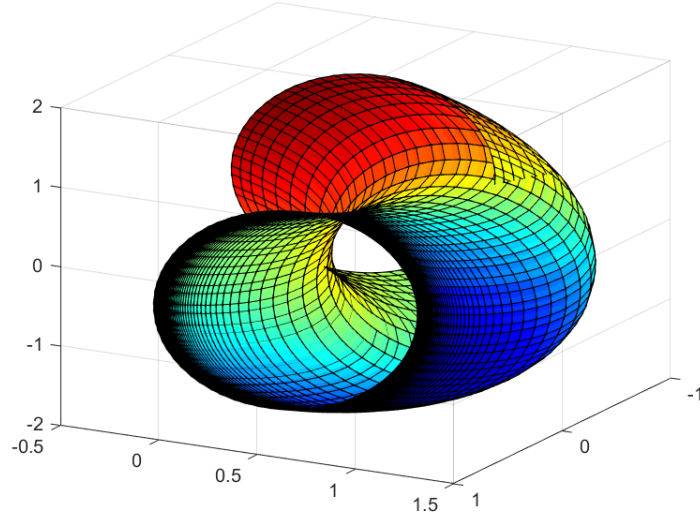


Figure 3.2. Surface de translation g n r e par les indicatrices normales principales des courbes spatiales

3.3 Surfaces de translation générées par les indicatrices binormales de courbes régulières de \mathbb{E}^3

La surface de translation g n r e par les indicatrices binormales des courbes α, β de \mathbb{E}^3 est d termin e par :

$$M_3 : X(u, v) = b_\alpha(u) + b_\beta(v). \quad (3.3.1)$$

En calculant les dérivées partielles par rapport à u et v de la surface de translation donn e par la paramétrisation (3.3.1), on obtient :

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial X(u, v)}{\partial u} \\ &= b'_\alpha(u) \\ &= -\tau_\alpha n_\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_v &= \frac{\partial X(u, v)}{\partial v} \\ &= b'_\beta(v) \end{aligned}$$

$$= -\tau_\beta n_\beta.$$

Ainsi, les composantes de la première forme fondamentale de la surface M_3 sont :

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle -\tau_\alpha n_\alpha, -\tau_\alpha n_\alpha \rangle = \tau_\alpha^2, \quad (3.3.2)$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle -\tau_\alpha n_\alpha, -\tau_\beta n_\beta \rangle = \tau_\alpha \tau_\beta \cos[\theta(u, v)], \quad (3.3.3)$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \langle -\tau_\beta n_\beta, -\tau_\beta n_\beta \rangle = \tau_\beta^2, \quad (3.3.4)$$

où $\theta = \theta(u, v)$ est la fonction d'angle entre n_α et n_β . Alors, le vecteur normal unitaire de la surface de translation M_3 est donné par :

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{\tau_\alpha \tau_\beta (n_\alpha \wedge n_\beta)}{\|\tau_\alpha \tau_\beta (n_\alpha \wedge n_\beta)\|} \\ &= \frac{\tau_\alpha \tau_\beta (n_\alpha \wedge n_\beta)}{\tau_\alpha \tau_\beta \|n_\alpha\| \|n_\beta\| \sin[\theta(u, v)]} \\ &= \frac{n_\alpha \wedge n_\beta}{\sin[\theta(u, v)]}, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

et comme la surface M_3 est régulière, on a $\sin[\theta(u, v)] \neq 0$.

Le vecteur normal principal de la courbe α peut être exprimé comme une combinaison linéaire de t_β , n_β , et b_β comme suit :

$$n_\alpha = \mu_1 t_\beta + \mu_2 n_\beta + \mu_3 b_\beta. \quad (3.3.6)$$

On a $\theta = \theta(u, v)$ est la fonction d'angle entre n_α et n_β , et on note par $\phi = \phi(u, v)$ la fonction d'angle entre t_β et la projection de n_α sur le plan $\{t_\beta, b_\beta\}$.

D'après la figure 2 ci-dessous, il vient :

$$\cos[\theta(u, v)] = \frac{\mu_2}{r} \implies \mu_2 = r \cos[\theta(u, v)] \implies \mu_2 = \cos[\theta(u, v)]$$

car

$$r = \|n_\alpha\| = 1,$$

et

$$\sin[\theta(u, v)] = \frac{l}{r} \implies l = \sin[\theta(u, v)].$$

Puisque on a

$$\cos[\phi(u, v)] = \frac{\mu_1}{l} \implies \mu_1 = l \cos[\phi(u, v)]$$

$$\sin[\phi(u, v)] = \frac{\mu_3}{l} \implies \mu_3 = l \sin[\phi(u, v)]$$

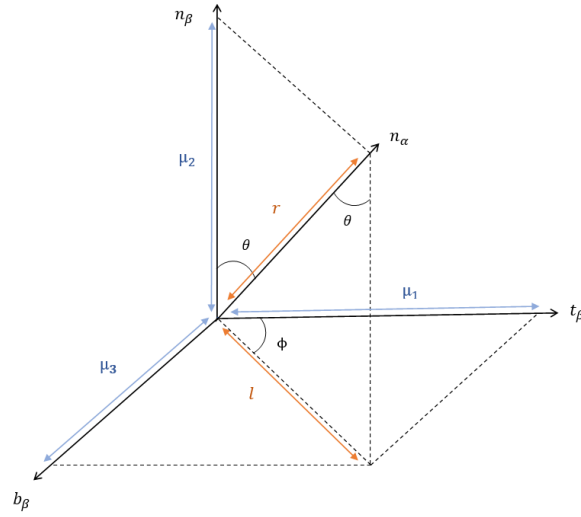


Figure 2

il vient

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= \langle n_\alpha, t_\beta \rangle = \sin[\theta(u, v)] \cos[\phi(u, v)], \\
 \mu_2 &= \langle n_\alpha, n_\beta \rangle = \cos[\theta(u, v)], \\
 \mu_3 &= \langle n_\alpha, b_\beta \rangle = \sin[\theta(u, v)] \sin[\phi(u, v)].
 \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

De même, le vecteur normal principal de la courbe β peut être exprimé comme une combinaison linéaire de t_α , n_α , et b_α comme suit :

$$n_\beta = \lambda_1 t_\alpha + \lambda_2 n_\alpha + \lambda_3 b_\alpha \tag{3.3.8}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \langle n_\beta, t_\alpha \rangle = \sin[\theta(u, v)] \cos[\gamma(u, v)], \\
 \lambda_2 &= \langle n_\beta, n_\alpha \rangle = \cos[\theta(u, v)], \\
 \lambda_3 &= \langle n_\beta, b_\alpha \rangle = \sin[\theta(u, v)] \sin[\gamma(u, v)],
 \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

où $\gamma = \gamma(u, v)$ est la fonction d'angle entre t_α et la projection de n_β sur le plan $\{t_\alpha, b_\alpha\}$.

Donc on peut avoir le vecteur normal unitaire de la surface M_3 de deux manières différentes :

Soit

$$N(u, v) = \frac{n_\alpha \wedge n_\beta}{\sin[\theta(u, v)]}$$

En utilisant (3.3.5) et (3.3.8), on obtient :

$$N_1(u, v) = \frac{n_\alpha \wedge (\lambda_1 t_\alpha + \lambda_2 n_\alpha + \lambda_3 b_\alpha)}{\sin[\theta(u, v)]}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda_3 t_\alpha - \lambda_1 b_\alpha}{\sin[\theta(u, v)]} \\
&= \frac{\sin[\theta(u, v)] \sin[\gamma(u, v)] t_\alpha - \sin[\theta(u, v)] \cos[\gamma(u, v)] b_\alpha}{\sin[\theta(u, v)]} \\
&= \sin[\gamma(u, v)] t_\alpha - \cos[\gamma(u, v)] b_\alpha.
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

En utilisant (3.3.5) et (3.3.6), on obtient :

$$\begin{aligned}
N_2(u, v) &= \frac{(\mu_1 t_\beta + \mu_2 n_\beta + \mu_3 b_\beta) \wedge n_\beta}{\sin[\theta(u, v)]} \\
&= \frac{-\mu_3 t_\beta + \mu_1 b_\beta}{\sin[\theta(u, v)]} \\
&= \frac{-\sin[\theta(u, v)] \sin[\phi(u, v)] t_\beta + \sin[\theta(u, v)] \cos[\phi(u, v)] b_\beta}{\sin[\theta(u, v)]} \\
&= -\sin[\phi(u, v)] t_\beta + \cos[\phi(u, v)] b_\beta.
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

En calculant les dérivées partielles secondes de $X(u, v)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
X_{uu} &= \frac{\partial^2 X(u, v)}{\partial u^2} \\
&= (-\tau_\alpha n_\alpha)' \\
&= -\tau'_\alpha n_\alpha - \tau_\alpha n'_\alpha \\
&= \tau'_\alpha n_\alpha + \tau_\alpha (-\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha) \\
&= \kappa_\alpha \tau_\alpha t_\alpha - \tau'_\alpha n_\alpha - \tau_\alpha^2 b_\alpha,
\end{aligned}$$

$$X_{uv} = X_{vu} = 0,$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 X(u, v)}{\partial u^2} \\
&= (-\tau_\beta n_\beta)' \\
&= -\tau'_\beta n_\beta - \tau_\beta n'_\beta \\
&= \tau'_\beta n_\beta - \tau_\beta (-\kappa_\beta t_\beta + \tau_\beta b_\beta) \\
&= \kappa_\beta \tau_\beta t_\beta - \tau'_\beta n_\beta - t_\beta - \tau_\beta^2 b_\beta.
\end{aligned}$$

Les composantes de la deuxième forme fondamentale de la surface M_3 sont données par

$$l = \langle X_{uu}, N \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle X_{uu}, N_1 \rangle \\
&= \langle \kappa_\alpha \tau_\alpha t_\alpha - \tau'_\alpha n_\alpha - \tau_\alpha^2 b_\alpha, \sin[\gamma(u, v)] t_\alpha - \cos[\gamma(u, v)] b_\alpha \rangle \\
&= \kappa_\alpha \tau_\alpha \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u, v)] \right], \tag{3.3.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m &= \langle X_{uv}, N \rangle \\
&= 0, \tag{3.3.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n &= \langle X_{vv}, N \rangle \\
&= \langle X_{vv}, N_2 \rangle \\
&= \langle \kappa_\beta \tau_\beta t_\beta - \tau'_\beta n_\beta - \tau_\beta^2 b_\beta, -\sin[\phi(u, v)] t_\beta + \cos[\phi(u, v)] b_\beta \rangle \\
&= -\kappa_\beta \tau_\beta \left[\cos[\phi(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u, v)] \right]. \tag{3.3.14}
\end{aligned}$$

Proposition 3.3.1. *La courbure gaussienne K et la courbure moyenne H de la surface de translation M_3 sont respectivement :*

$$K = -\frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u, v)] \right] \left[\cos[\phi(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u, v)] \right]}{\tau_\alpha \tau_\beta \sin^2[\theta(u, v)]}, \tag{3.3.15}$$

$$H = \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \left[\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u, v)] \right] - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left[\cos[\phi(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u, v)] \right] \right]}{2\tau_\alpha \tau_\beta \sin^2[\theta(u, v)]}. \tag{3.3.16}$$

Démonstration. *On a*

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}.$$

En utilisant (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4), (3.3.12), (3.3.13) et (3.3.14), on obtient :

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \tau_\alpha \tau_\beta \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u, v)] \right] \left[\cos[\phi(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u, v)] \right]}{\tau_\alpha^2 \tau_\beta^2 - \tau_\alpha^2 \tau_\beta^2 \cos^2[\theta(u, v)]} \\
&= -\frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u, v)] \right] \left[\cos[\phi(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u, v)] \right]}{\tau_\alpha \tau_\beta (1 - \cos^2[\theta(u, v)])}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u, v)] \right] \left[\cos[\phi(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u, v)] \right]}{\tau_\alpha \tau_\beta \sin^2[\theta(u, v)]}.$$

On a

$$H = \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)}.$$

En utilisant (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4), (3.3.12), (3.3.13) et (3.3.14), on obtient :

$$\begin{aligned} H &= \frac{-\kappa_\beta \tau_\beta \tau_\alpha^2 \left[\cos[\phi(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u, v)] \right] + \kappa_\alpha \tau_\alpha \tau_\beta^2 \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u, v)] \right]}{2(\tau_\alpha^2 \tau_\beta^2 - \tau_\alpha^2 \tau_\beta^2 \cos^2[\theta(u, v)])} \\ &= \frac{-\kappa_\beta \tau_\alpha \left[\cos[\phi(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u, v)] \right] + \kappa_\alpha \tau_\beta \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u, v)] \right]}{2\tau_\alpha \tau_\beta \sin^2[\theta(u, v)]} \\ &= \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \left[\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u, v)] \right] - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left[\cos[\phi(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u, v)] \right] \right]}{2\tau_\alpha \tau_\beta \sin^2[\theta(u, v)]}. \end{aligned}$$

Théorème 3.3.2. Si la surface M_3 est développable, alors

$$\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u, v)] = 0 \quad \text{ou} \quad \cos[\phi(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u, v)] = 0. \quad (3.3.17)$$

Démonstration. Si la surface M_3 est développable, sa courbure gaussienne est nulle i.e. $K = 0$.

Théorème 3.3.3. Si la surface M_3 est développable, alors l'angle $\gamma[(u, v)]$ est une fonction qui ne dépend que de u ou l'angle $\phi[(u, v)]$ est une fonction qui ne dépend que de v .

Démonstration. Si la surface M_3 est développable, alors (3.3.17) est vérifié.

$$\text{Si} \quad \cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u, v)] = 0, \quad \text{alors} \quad \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = -\frac{\sin[\gamma(u, v)]}{\cos[\gamma(u, v)]} = -\tan[\gamma(u, v)],$$

d'où l'angle γ est une fonction de u .

De même

$$\text{Si} \quad \cos[\phi(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u, v)] = 0, \quad \text{alors} \quad \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = -\frac{\sin[\phi(u, v)]}{\cos[\phi(u, v)]} = -\tan[\phi(u, v)],$$

l'angle ϕ ne dépend que de v .

Théorème 3.3.4. Si la surface M_3 est développable et si les courbes α et β sont des hélices, alors l'un des angles θ ou γ est constant.

Démonstration. On suppose que la surface M_3 est développable, alors l'équation (3.3.17) est satisfaite.

$$\text{Si } \cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u, v)] = 0, \text{ alors } \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = - \frac{\sin[\gamma(u, v)]}{\cos[\gamma(u, v)]} = - \tan[\gamma(u, v)],$$

et puisque α est une hélice, $\tan[\gamma(u, v)]$ devient constant et cela implique que γ est constant.

De même

$$\text{Si } \cos[\phi(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u, v)] = 0, \text{ alors } \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = - \frac{\sin[\phi(u, v)]}{\cos[\phi(u, v)]} = - \tan[\phi(u, v)],$$

et puisque β est une hélice, $\tan[\phi(u, v)]$ devient constant et cela implique que ϕ est constant.

Théorème 3.3.5. Si la surface M_3 est développable et si les courbes α et β sont des hélices, alors la surface M_3 est une surface d'angle constant.

Démonstration. On suppose que la surface M_3 est développable et que les courbes α et β sont des hélices. D'après le théorème (3.3.4), $\gamma = \gamma_0$ ou $\phi = \phi_0$ sont des angles constants.

Sans perdre en généralité, on peut supposer que γ est constant.

Puisque α est une hélice, alors il existe une direction constante unitaire u_α qui fait un angle constant avec le vecteur tangent unitaire t_α de la courbe α . Alors

$$\langle t_\alpha, u_\alpha \rangle = \cos \psi = \text{constante}$$

On peut donc définir u_α comme suit :

$$u_\alpha = \cos \psi_0 t_\alpha + \sin \psi_0 b_\alpha. \quad (3.3.18)$$

En utilisant (3.3.10) et (3.3.18), on obtient

$$\begin{aligned} \langle N_1, u_\alpha \rangle &= \langle \sin \gamma_0 t_\alpha - \cos \gamma_0 b_\alpha, \cos \psi_0 t_\alpha + \sin \psi_0 b_\alpha \rangle \\ &= \sin \gamma_0 \cos \psi - \cos \gamma_0 \sin \psi_0 \\ &= \text{constante.} \end{aligned}$$

D'après la définition (1.2.5), la démonstration est achevée.

Théorème 3.3.6. Si la surface M_3 est minimale, alors

$$\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} \left[\cos[\gamma(u, v)] \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} + \sin[\gamma(u, v)] \right] = \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \left[\cos[\phi(u, v)] \frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} + \sin[\phi(u, v)] \right].$$

Démonstration. Si la surface M_3 est minimale, sa courbure moyenne est nulle, i.e. $H = 0$.

Exemple 3.3.7. Soient α et β des courbes paramétrisées par longueur d'arc et définies par :

$$\alpha(u) = \left(1 + \frac{u}{\sqrt{3}}\right) \left(\cos\left[\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right], \sin\left[\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right], 1\right),$$

$$\beta(v) = \frac{1}{2} \left(v + \sqrt{1+v^2}, (v + \sqrt{1+v^2})^{-1}, \sqrt{2}\ln(v + \sqrt{1+v^2})\right).$$

En calculant les indicatrices binormales de la courbe α et β on trouve :

$$b_\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\sin\left[\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right] - \cos\left[\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right], -\sin\left[\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right] - \cos\left[\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right], 2\right),$$

$$b_\beta(v) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{1+v^2}(v + \sqrt{1+v^2})}, \frac{v + \sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+v^2}}\right).$$

La surface de translation engendrée par les indicatrices binormales b_α et b_β des courbes spatiales est donnée par :

$$M_3(u, v) = b_\alpha(u) + b_\beta(v)$$

Il s'en suit

$$M_3(u, v) = \left(\begin{array}{c} \frac{\sin\left[\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right] - \cos\left[\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2\sqrt{1+v^2}(v + \sqrt{1+v^2})}, \\ \frac{\sin\left[\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right] - \cos\left[\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]}{\sqrt{6}} + \frac{v + \sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1+v^2}}, \\ \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+v^2}} \end{array} \right).$$

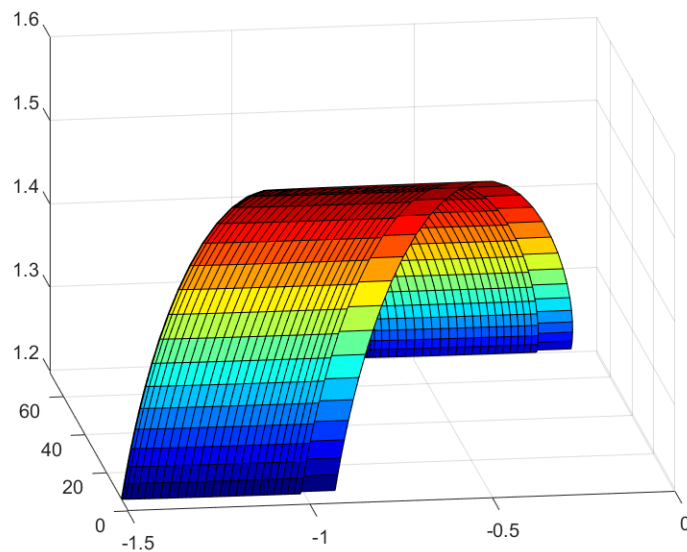


Figure 3.3. Surface de translation engendrée par des indicatrices binormales des courbes spatiales

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ce travail rassemble un ensemble de résultats importants relatifs aux surfaces de translation. Il porte d'abord sur l'étude des surfaces de translation, dans le cas où elles sont générées par deux courbes spatiales arbitraires dans l'espace euclidien tridimensionnel, et s'intéresse par la suite, au cas particulier où ces surfaces sont engendrées par des indicatrices sphériques des courbes régulières de \mathbb{E}^3 .

Parmi la particularité de ces surfaces on retiendra, que pour une surface de translation avec une représentation paramétrique classique $X(u, v) = f(u) + g(v)$, les dérivées partielles X_u et X_v sont de simples dérivées de courbes, ce qui annule le coefficient m de la deuxième forme fondamentale. Ce coefficient participe à l'étude de la développabilité, la minimalité ainsi que le classement des points particuliers d'une surface.

Les surfaces de translation représentent un sujet riche et intéressant qui peut être développé sur plusieurs axes. Comme continuité de ce travail, on projette de :

- Mener une étude similaire à l'étude des surfaces de translation générées par les indicatrices sphériques de Frenet $\{t, n, b\}$, en utilisant les indicatrices sphériques de Bishop $\{T, M_1, M_2\}$ pour des courbes dans l'espace \mathbb{E}^3 et les indicatrices sphériques de Darboux $\{\tau, g, h\}$ pour des courbes tracées sur une surface de \mathbb{E}^3 .
- Généraliser les résultats obtenus dans \mathbb{E}^3 , à un espace euclidien à n dimensions \mathbb{E}^n .
- Reprendre la même étude pour une surface de translation affine représentée par le graphe d'une fonction défini par

$$Z(u, v) = f(u) + g(v + au)$$

où a est une constante non nulle, et f, g des fonctions différentielles. Notons que dans le cas $a = 0$, la surface de translation affine devient une surface de translation classique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Darboux, *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces et ses Applications Géométriques du Calcul Infinitésimal*, vol. 1–4, Chelsea Publ. Co, reprint, 1972.
- [2] T. Ali Ahmad, H. S. Abdel Aziz and H. Sorour Adel, On curvatures and points of the translation surfaces in Euclidean 3-space, *J. Egyptian Math. Soc.*, 23, 167–172, (2015).
- [3]] L. Verstraelen, J. Walrave, S. Yaprak, The minimal translation surfaces in Euclidean space, *Soochow J. Math.* 20 (1) (1994) 77–82.
- [4] H. Liu, Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces, *J. Geom.* 64 (1999) 141–149.
- [5] D.W. Yoon, On the Gauss map of translation surfaces in Minkowski 3-space, *Taiwan J. Math.* 6 (3) (2002) 389–398.
- [6] F. Dillen, W. Goemans, I. Van de Woestyne, Translation surfaces of Weingarten type in 3-space, *Bull. Transilv. Univ. Brasov.* 15 (2008) 109–122.
- [7] D.W. Yoon, Polynomial translation surfaces of Weingarten types in Euclidean 3-space, *Central Eur. J. Math.* 8 (3) (2010) 430–436.
- [8] I.M. Munteanu, A.I. Nistor, On the geometry of the second fundamental form of translation surfaces in E^3 , *Houston J. Math.* 37 (2011) 1087–1102.
- [9] M. Bekkar, B. Senoussi, Translation surfaces in the 3-dimensional space satisfying $\Delta^{III} r_i = \mu_i r_i$, *J. Geom.* 103 (2012) 367–374.
- [10] M. Cetin, Y. Tuncer, N. Ekmekci, Translation surfaces in Euclidean 3-space, *World Acad. Sci. Engin. Tech.* 52 (2011) 864–868.
- [11] M. Cetin, H. Kocayigit, M. Onder, Translation surfaces according to Frenet frame in Minkowski 3-space, *Int. J. Phys.Sci.* 7 (47) (2012) 6135–6143.

-
- [12]] D.J. Struik, Lectures in Classical Differential Geometry, Addison-Wesley Reading, MA, 1961.
- [13]] M. do Carmo, Defferntial Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- [14] H.H. Hacisalihoglu, Differential Geometry, Ankara University, Faculty of Science Press, 2000.
- [15] B. O'Neill, Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York, 1966.
- [16] I.M. Munteanu, A.I. Nistor, Polynomial translation Weingarten surface in 3-dimensional Euclidean space, 2008, arXiv :0809.4745v1 [Math DG].
- [17] A.T. Ali, Position vectors of general helices in Euclidean 3-space, Bull. Math. Anal. Appl. 3 (2) (2010) 198–205.
- [18] P. Cermelli and A. J. Di Scala, Constant-angle surfaces in liquid crystals, Philo- sophical Magazine, 87(12), 1871–1888, (2007).
- [19] M. Cetin, Y. Tuncer, N. Ekmekci, Translation surfaces in Euclidean 3-space, World Acad. Sci. Engin. Tech. 52 (2011) 864–868.
- [20] Yan-Bin Jia, Gaussian and Mean Curvatures, Oct 22, 2020.
- [21] M. Cetin, H. Kocayigit, M. Onder, Translation surfaces according to Frenet frame in Minkowski 3-space, Int. J. Phys.Sci. 7 (47) (2012) 6135–6143.
- [22] M. Cetin and Y. Tuncer, Parallel surfaces to translation surfaces in Euclidean 3- space, Commun Fac. Sci.Univ. Ank. Series A1 Math. Stat., 64(2), 47–54, (2015).
- [23] A. Gray, Modern Diferential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, CRC Press, Florida (1998).
- [24] [7] H. H. Hacisalihoglu, Diferensiyel Geometri 1.Cilt (3.Baskı), Ertem Matbaa, Ankara (2000).
- [25] [8] H. H. Hacisalihoglu, ~ Diferensiyel Geometri 2.Cilt (4.Baskı), Ertem Matbaa, Ankara (2012).
- [26] A. A. Shaikh and P. R. Ghosh, Rectifying curves on a smooth surfaces immersed in the Euclidean space, Indian J. Pure Appl. Math., 50(4), 883–890, (2019).
- [27] A. A. Shaikh and P. R. Ghosh, Rectifying and Osculating curves on a smooth surface, Indian J. Pure Appl. Math., 51(1), 67–75, (2020).
- [28] A. A. Shaikh, M. S. Lone and P. R. Ghosh, Conformal image of an osculating curves on a smooth immersed surface, J. Geom. Phy., 151, (2020).

-
- [29] A. A. Shaikh, P. R. Ghosh, Curves on a smooth surface with position vectors lie in the tangent plane, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 51(3), 1097–1104, (2020).
- [30] D.J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, New-York (1988).