FSBM
FACULTE DES SCIENCES BEN M'SICK
UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

Université Hassan II Casablanca
Faculté des Sciences Ben M'sik
Département de Mathématiques et Informatique

**FILIERE : SCIENCES MATHEMATIQUES & APPLICATIONS**

**MODULE : PROJET DE FIN D'ETUDES**

**COORDONNATEUR : M. Youssef EL FOUTAYENI**

# PROJET DE FIN D'ÉTUDE

## Stabilité des systèmes dynamiques régies par des équations différentielles ordinaires et application

**Réalisé par :** M. MOHAMMED EL BAIDAOUI

**Présenté et soutenu devant le jury composé de :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Pr.* | IMANE EL BERRAI | ------------------- | *Président* |
| *Pr.* | ABDERRAHIM EL ADRAOUI | ------------------- | *Examinateur* |
| *Pr.* | OMAR ZAKARY | ------------------- | *Examinateur* |
| *Pr.* | MALIKA IZID | ------------------- | *Examinateur* |
| *Pr.* | SARA SIDAH | ------------------- | *Examinateur* |
| *Pr.* | EL MEHDI LOTFI | ------------------- | *Encadrant* |

**2021 -2022**

# Table des matières

**1 Introduction** **4**
1.1 Historique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
1.2 Préliminaires . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

**2 Équations différentielles ordinaires (EDO)** **7**
2.1 Éxistence et unicité de la solution . . . . . . . . . . . . . . . . 7
2.2 EDO lineaires . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10
2.3 EDO à coefficients constants . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
2.4 EDO linéaires à coefficients constants non homogènes . . . . . 13
2.5 EDO linéaires à coefficients constants d'ordre 2 homogènes . . 14
2.6 EDO linéaires à coefficients constants d'ordre 2 non homogènes 16

**3 Stabilité d'un systéme dynamique** **17**
3.1 Stabilité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17
3.1.1 Points d'équilibre et stabilité . . . . . . . . . . . . . . 17
3.1.2 Fonction de Lyapunov . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20
3.2 Stabilité d'un systéme dynamique . . . . . . . . . . . . . . . . 24
3.2.1 Stabilité d'un point fixe . . . . . . . . . . . . . . . . . 24
3.2.2 Stabilité par l'analyse des valeurs propres . . . . . . . . 25
3.2.3 Stabilité par le critére de Rooth-Hurwitz . . . . . . . . 26
3.2.4 Stabilité par des fonctions de Lyapunov . . . . . . . . 29

**4 Application** **30**
4.1 Travail de cadre modèle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30
4.2 Analyse de seuil . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
4.3 Simulation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

**5 Bibliographie** **38**

## Dédicaces

Je dédie ce modeste travail accompagné d'un profond amour :

à celle qui m'a arrosé de tendresse et d'espoirs, à la source d'amour, Incessible, à la mère des sentiments fragiles qui ma bénie par ces prières, ma mère

à mon support dans ma vie, qui m'a appris m'a supporté et ma dirigé vers la gloire, mon père

A toutes les personnes de ma grande famille ,

A mes meilleures amies.

## Remerciements

Toute ma gratitude et tous mes remerciements les plus sincères à Allah le tout puissant pour m'avoir guidé et assisté durant ces longues années d'études.

J'exprime mes sincères remerciements à Monsieur EL MEHDI LOTFI pour son encadrement, son enthousiasme, sa disponibilité, ses encouragements et ses qualités humaines.

Je tiens aussi à remercier les Professeurs ABDERRAHIM EL ADRAOUI, OMAR ZAKARY, MALIKA IZID et SARA SIDAH qui m'ont fait l'honneur d'examiner mon travail et de participer à ce jury, et Professeur IMANE EL BERRAI pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider ce jury.

J'exprime également mes sincères remerciements au corps professoral et administratif de faculté des sciences ben m'sik, pour la richesse et la qualitè de leur enseignement et les grands efforts pour nous assurer une bonne formation.

# 1 Introduction

## 1.1 Historique

En mathématiques, une équation différentielle ordinaire (parfois simplement appelée équation différentielle et abrégée en EDO) est une équation différentielle dont la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable, elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. Le terme ordinaire est utilisé par opposition au terme équation différentielle partielle (plus communément équation aux dérivées partielles, ou EDP) où la ou les fonctions inconnues peuvent dépendre de plusieurs variables. Dans la suite du rapport, le terme équation différentielle est utilisé pour signifier équation différentielle ordinaire. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise. Il existe une forme de référence à laquelle on essaie de ramener les équations différentielles ordinaires par divers procédés mathématiques :

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

équation d'ordre 1 où $X$ est la fonction inconnue, et $t$ sa variable.

Les équations différentielles représentent un objet d'étude de toute première importance, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. Elles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de processus d'évolution physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité, la mécanique céleste ou la dynamique des populations... La variable $t$ représente alors souvent le temps, même si d'autres choix de modélisation sont possibles.

Les objectifs principaux de la théorie des équations différentielle ordinaires sont la résolution explicite complète quand elle est possible, la résolution approchée par des procédés d'analyse numérique, ou encore l'étude qualitative des solutions. Ce dernier domaine s'est progressivement étoffé, et constitue l'un des composants principaux d'une vaste branche des mathématiques contemporaines : l'étude des systèmes dynamiques.

## 1.2 Préliminaires

Soit $I$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}, J$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 1$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$.

**Définition 1.** [1] *On appelle équation différentielle ordinaire (EDO) du premier ordre associer a une fonction $f : I \times J \mapsto \mathbb{R}^n$ continue est une équation de la forme :*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Remarque 1.** [1] *Une équation différentielle ordinaire est dite autonome si elle ne dépend pas explicitement du temps, c'est-d-dire ;*

$$x'(t) = f(x(t)). \tag{1}$$

**Définition 2.** [1] *La solution de l'équation* (1) *est une fonction $x : t \in I \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$ bien définie et dérivable sur $I$ et vérifiant :*
*1. $\forall t \in I, (t, x(t)) \in I \times J$,*
*2. $\forall t \in I, x'(t) = f(t, x(t))$.*

**Exemple 1.** *-les équations suivantes :*

$$y'(t) - t = 0$$
$$y^{2\,\prime}(t) - y(t) = 0$$
$$e^{y^{2\,\prime}(t)} - t^2 + y = 0$$

*sont des équations différentielles ordinaires.*
*-En physique : (la deuxième loi de Newton), on a :*

$$F(t) = mx''(t),$$

*qui décrit la dynamique d'un point matérielle soumis à la résultante des forces $F$. On peut écrire la loi de Newton en termes du système :*

$$\begin{cases} x'(t) = v(t), \\ v'(t) = \frac{1}{m}F(t), \end{cases}$$

*de deux équations d'ordre 1.*

*Dans la suite on va considerer des équations différentielles d'ordre $k$ sous la forme :*

$$y^{(k)} = f\left(t, y, \cdots, y^{(k-1)}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

# 2 Équations différentielles ordinaires (EDO)

## 2.1 Éxistence et unicité de la solution

**Définition 3.** [1] *[Fonction localement lipschitzienne] Soient $I$ un intervalle, $D$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : I \times D \mapsto \mathbb{R}^n$.*
*Soient $(t_0, y_0) \in I \times D$. Soit $J \subset D$ un voisinage du point $y_0$. On dit que $f$ est lipschitzienne par rapport à la variable $y$ dans le voisinage $J$ s'il existe une constante $L > 0$ et il existe un voisinage $U \subset I$ du point $t_0$ tels que :*

$$\|f\,(t, y_1(t)) - f\,(t, y_2(t))\| \leq L\,\|y_1(t) - y_2(t)\|$$

*pour $y_1(t), y_2(t) \in J, t \in U$.*

**Exemple 2.** *La fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ :*

$$f(y(t)) = |y(t)|$$

*est lipschitzienne au voisinage de tout $y \in \mathbb{R}$. En fait pour tout $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ on a :*

$$|f\,(y_1(t)) - f\,(y_2(t))| = ||y_1(t)| - |y_2(t)||.$$

*La condition de Lipschitz est donc vérifiée avec $L = 1$ :*

$$||y_1(t)| - |y_2(t)|| \leq |y_1(t) - y_2(t)|\,.$$

*Noter que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en $y = 0$. Cependant elle est lipshcitizienne.*

**Définition 4.** [1] *[Problème de Cauchy]*
*On appelle problème de Cauchy le problème de trouver un intervalle $I$ tel que*

*$t_0 \in I$ et une fonction $y : I \mapsto \mathbb{R}^n$ qui vérifie :*

$$\begin{cases} y\prime(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I, \\ y(t_0) = y_0, \quad t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

*les questions classiques qui se posent sont : sous quelles conditions existe-t-il une solution du problème de Cauchy ? Cette solution est-elle unique ?*
*Le théorème de Cauchy- Lipschitz donne une réponse à ces deux questions. Si $f$ satisfait une condition supplémentaire, alors l'existence et l'unicité d'une solution sont assurées localement, c'est à dire sur un (petit) intervalle autour de $t_0$. La condition supplémentaire qu'on demande pour la fonction $f$ est d'être lipschitzienne par rapport à la variable $y$ dans un voisinage du point initial $y_0$.*

**Théorème 1.** [1]*[Cauchy - Lipschitz ]*
*Soient $I$ un intervalle, $D$ un ouvert de $\mathbb{R}^n, f : I \times D \mapsto \mathbb{R}^n$. Soient $(t_0, y_0) \in I \times D$.*
*Si $f$ est continue et lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable dans un voisinage du point $y_0$, alors le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} y\prime(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I \\ y(t_0) = y_0, \quad t_0 \in I, y_0 \in D. \end{cases}$$

*admet une unique solution $\bar{y}$ définie dans un petit voisinage du point $t_0$. De plus la solution est de classe $C^1$ dans ce voisinage.*

**Demonstration :**[2]
Soit $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, lipschitzienne par rapport a $y$. Soit le système :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0; t_0 \in [a, b] \end{cases}$$

C'est-à-dire : $\exists L > 0$ tel que $\forall (t, x), (t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

Ce système est équivalent à la forme intégrale (par Taylor) :

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} y'(s)\mathrm{d}s, \quad \forall t \in [a,b]$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s$$

on définit l'opérateur :

$$T_y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s$$

$y$ solution de (E) $\Leftrightarrow y(t) = T_y(t) \quad \forall t \in [a,b]$ Soit $X = C([a,b], \mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ telle que :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \neq 0} e^{-\alpha|t-t_0|}|f(t)| \quad \alpha > 0$$

On a :

$$T : X \to X$$
$$s \mapsto f(s, y(s))$$

est continue, et donc

$$t \mapsto \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{ds}$$

est $C^1$ et donc continue. On va montrer qu'avec un choix judicieux de $\alpha, T$ est une contraction. Soient $x, y, z \in X$

$$(T_y - T_z)(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) - f(s, z(s))\mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
\|T_y(t) - T_z(t)\|_\alpha &\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)| \mathrm{d}s \right| \\
&\leq L \left| \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha|t-t_0|+\alpha|s-t_0|} e^{-\alpha|t-t_0|} |y(s) - z(s)| \mathrm{d}s \right| \\
&\leq L \left| \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha|t-s|} \mathrm{d}s \right| \|y - z\|_\alpha
\end{aligned}
$$

On peut donc majorer l'intégrale ainsi

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha|t-t_0|} \mathrm{d}s \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha|t-s|} \mathrm{d}s \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha|s|} \mathrm{d}s \\
&\leq \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha s} \, \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{2}{\alpha}
\end{aligned}
$$

Ceci implique que $\|T_y - T_z\|_\alpha \leq \frac{2L}{\alpha} \|y_z\|_\alpha$
On choisit $\alpha$ tel que $\frac{2L}{\alpha} < 1$
$\Rightarrow T : (X, \| \cdot \|_\alpha)$ est une contraction
$\Rightarrow T_y = y$ admet une seule solution !

## 2.2 EDO lineaires

Soient I un intervalle, D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : I \times D \mapsto \mathbb{R}^n$.
On dit que $f$ est linéaire par rapport à la variable $y$ si pour tout $t \in I$ fixé, on a :

$$
f\left(t, \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)\right) = \lambda_1 f\left(t, y_1(t)\right) + \lambda_2 f\left(t, y_2(t)\right),
$$

pour tout $y_1(t), y_2(t) \in D, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Si $f$ est linéaire alors il existe une matrice $A : I \mapsto M_n(\mathbb{R})$ telle que $f(t, y(t)) = A(t)y(t)$. On appelle équation différentielle linéaire (du premier

ordre) toute équation de la forme :

$$y'(t) = A(t)y(t),$$

oú $y : I \mapsto \mathbb{R}^n$ est une fonction inconnue et $A : I \mapsto M_n(\mathbb{R})$ est une matrice.

**Proposition 1.** [1]
*Soient $I$ un intervalle, $D$ un ouvert de $\mathbb{R}^n, A : I \mapsto M_n(\mathbb{R})$ une matrice. Soient $(t_0, y_0) \in I \times D$. Si $A$ est continue sur $I$ alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times D$ il existe une unique solution $y : I \mapsto \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} y\prime(t) = A(t)y(t), & t \in I, \\ y(t_0) = y_0, & y_0 \in D. \end{cases}$$

*Ce résultat est une simple conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz. Le prochain théorème donne une caractérisation des solutions d'une équation différentielle linéaire.*

**Théorème 2.** [1]*Soient $I$ un intervalle et $A : I \mapsto M_n(\mathbb{R})$ une matrice continue. Alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :*

$$y'(t) = A(t)y(t),$$

*est une espace vectoriel de dimension $n$.*
*Notamment il existe $n$ fonctions $y^{(1)}(t), \cdots, y^{(n)}(t)$ telles que :*
*- $y^{(i)}(t)$ est solution de l'EDO pour tout $i = 1, \cdots, n$ ;*
*- les $y^{(i)}(t)$ sont linéairement indépendants :*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(t) = 0 \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i, c_i \in \mathbb{R}$$

*- si $\overline{y(t)}$ est une solution de l'EDO et $\overline{y(t)} \neq y^{(i)}(t)$ pour tout $i = 1, \cdots, n$*

*alors* $\overline{y(t)}$ *il existe* $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{R}$ *tels que :*

$$\overline{y(t)} = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(t)$$

## 2.3 EDO à coefficients constants

On cherche à résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y\prime(t) = Ay(t), t \in I, \\ y\left(t_0\right) = y_0, \quad y_0 \in D, \end{cases} \qquad (1)$$

dont la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ ne dépend pas de $t$. Par analogie avec le cas scalaire ( modèle de Malthus), on a la tentation d'affirmer que la solution du problème est donné par $y : I \mapsto \mathbb{R}^n$ ainsi définie :

$$y(t) = e^{A(t-t_0)} y_0, \qquad (2)$$

Dans l'expression de la solution on voit apparaitre l'exponentielle d'une matrice A.
Qu'est-ce c'est l'exponentielle d'une matrice ?
Formellement elle est définie comme la matrice égale à

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!},$$

Avec un peu de théorie d'operateurs dans les espaces de Banach on pourrait montrer que cette série est convergente.
On appelle sa limite exponentielle de la matrice $A$. En supposant d'avoir donné un sens à la notion d'exponentielle d'une matrice, on pourrait aussi démontrer que 2 est l'unique solution du problème 1 .
En pratique, pour calculer la solution d'un problème de type 1 il faut calculer l'exponentielle de la matrice associée au problème. Si cette matrice est diagonalisable alors le calcul de l'exponentielle est plutôt simple.

**Proposition 2.** [1] *Exponentielle d'une matrice diagonalisable dans* $\mathbb{R}$ *.*
*Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice diagonalisable dans* $\mathbb{R}$*.*
*Alors il existe* $n$ *valeurs propres* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *et une matrice* $C \in M_n(\mathbb{R})$ *inversible tels que :*

$$A = C \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) C^{-1},$$

*Sous ces hypothèse on peut montrer que l'exponentielle de la matrice* $A$ *est simplement :*

$$e^A = C \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}\right) C^{-1},$$

*Ainsi, si* $A$ *est diagonalisable, le calcul de la solution du problème repose sur le calcul des valeurs propres (et vecteurs propres ) de la matrice* $A$*. Si* $A$ *n'est pas diagonalisable, le calcul repose sur sa décomposition de Jordan.*

## 2.4 EDO linéaires à coefficients constants non homogènes

On cherche à résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y\prime(t) = Ay(t) + B(t), & t \in I, \\ y(t_0) = y_0, & y_0 \in D. \end{cases}$$

avec $I$ intervalle, $A \in M_n(\mathbb{R}), B : I \mapsto \mathbb{R}^n$ continue, $y : I \mapsto \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}^n$.
On appelle équation homogène associée à l'équation
$y'(t) = Ay(t) + B(t)$ l'équation :

$$y'(t) = Ay(t),$$

oú le second membre $B(t)$ est nul.
On appelle équation non homogène l'équation $y\prime(t) = Ay(t) + B(t)$ avec $B(t)$ non nul. Toute solution de l'équation différentielle non homogène s'écrit comme somme de la solution générale de l'équation homogène plus une so-

lution particulière de l'équation non homogène :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

La solution qui vérifie la condition initiale $y(t_0) = y_0$ s'écrit sous la forme :

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)ds.$$

Le première terme est la bien connue solution du problème de Cauchy homogène. Le deuxième terme est une solution particulière de l'équation non homogène.

## 2.5 EDO linéaires à coefficients constants d'ordre 2 homogènes

Considérons l'équation différentielle d'ordre 2 homogène :

$$y'' + a_1 y' + a_0 y(t) = 0, \qquad (3)$$

oú $I$ est une intervalle, $y : I \mapsto \mathbb{R}, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.
On sait que l'espace des solutions de l'équation est un espace vectoriel de dimension 2 . On cherche une base de l'espace.
On cherche des solutions de la forme $y(t) = e^{\lambda t}$ (4).
En reportant dans (3) on voit que $y(t)$ est solution si et seulement si $\lambda$ vérifie :

$$\lambda(t)^2 + a_1\lambda(t) + a_0 = 0.$$

Ainsi on s'est ramené au calcul des racines d'un polynôme. On appelle ce polynôme le polynôme caractéristique de l'équation. Selon la nature des racines du polynôme caractéristique on peut distinguer trois cas.
**Cas 1 :** racines distinctes et réelles
Si le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes et réelles $\lambda_1, \lambda_2 \in$

$\mathbb{R}$, alors une base de l'espace vectoriel des solutions est donne par les fonctions :

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t},$$

Toute solution de l'équation différentielle (3) s'écrit sous la forme :

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

**Cas 2 :** une racine réelle multiple

Si le polynôme caractéristique admet une racine réelle multiple $\lambda \in \mathbb{R}$ . alors une base de l'espace vectoriel des solutions est donne par les fonctions :

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t},$$

Toute solution de l'équation différentielle 3 s'écrit sous la forme :

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 te^{\lambda t},$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

**Cas 3 :** deux racines complexes

Si le polynôme caractéristique admet deux racines complexes $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$, alors une base de l'espace vectoriel des solutions est donne par les fonctions :

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t).$$

Toute solution de l'équation différentielle (3) s'écrit sous la forme :

$$y(t) = e^{\alpha t}\left(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)\right),$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

## 2.6 EDO linéaires à coefficients constants d'ordre 2 non homogènes

Considérons l'équation différentielle d'ordre 2 non homogène :

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t), \qquad (5)$$

oú $I$ est une intervalle, $y : I \mapsto \mathbb{R}, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, f : I \mapsto \mathbb{R}$ continue.
Toute solution de (1) s'écrit comme somme de la solution générale de l'équation homogène (5) plus une solution particulière de l'équation non homogène 1 :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t). \qquad (6)$$

# 3 Stabilité d'un systéme dynamique

## 3.1 Stabilité

### 3.1.1 Points d'équilibre et stabilité

Considérons l'équation différentielle autonome :

$$x'(t) = f(x(t)), \qquad (3,1)$$

où le champ de vecteurs $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est supposé de classe $C^1$.

**Définition 5.** [3]
*On dit qu'un point $x_0 \in \Omega$ est un équilibre de (3.1) si la fonction constante $x(\cdot) \equiv x_0$ est solution de (3.1) ou, de façon équivalente, si $f(x_0) = 0$ (vérifier que c'est bien équivalent !).*

*Autrement dit, $\phi_t(x_0) = x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où $\phi$ est le flot du champ de vecteurs $f$ (l'intervalle maximal associé à $x_0$ étant $I_{x_0} = \mathbb{R}$ ). L'orbite de $x_0$ est donc réduite à un point : $\mathcal{O}_{x_0} = \{x_0\}$. Quand l'équation (3.1) modélise l'évolution d'un phénomène physique (mécanique, biologique, écologique, ...), un équilibre correspond bien à la notion habituelle «d'état d'équilibre» : si le système est dans l'état $x_0$, alors il y reste (et il y a toujours été). En pratique on sait cependant que seuls les états d'équilibre ayant certaines propriétés de stabilité sont significatifs.*

**Définition 6.** [3]
*Nous dirons qu'un équilibre $x_0$ est stable si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :*

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \textit{et} \quad t > 0 \quad \Longrightarrow \quad \|\phi_t(x) - x_0\| < \epsilon.$$

*Ainsi, toute solution proche de $x_0$ en reste proche.*

**Remarque 2.** *Toute solution dont la condition initiale est dans une boule $B(x_0, \delta)$ reste dans la boule $B(x_0, \epsilon)$, et donc dans un compact de $\Omega$, pour $t > 0$ (on suppose $\epsilon$ suffisamment petit pour que $\bar{B}(x_0, \epsilon) \subset \Omega$ ). ces solutions sont donc définies pour tout $t > 0$.*

**Définition 7.** [3]
*Nous dirons qu'un équilibre $x_0$ est asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que, pour tout $x \in V$,*

$$\lim_{t \to \infty} \phi_t(x) = x_0,$$

*Dans ce cas toute solution proche de l'équilibre en reste proche et en plus converge vers lui. Notons que le fait que toute solution issue d'un voisinage $V$ converge vers $x_0$ n'implique pas la stabilité de cet équilibre : il existe des systèmes possédant un équilibre non stable $x_0$ mais dont toutes les trajectoires convergent vers $x_0$.*

**Le cas linéaire** Considérons le cas particulier d'une équation différentielle autonome linéaire,

$$x'(t) = Ax(t), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

L'origine est toujours un équilibre de cette équation (mais il peut y en avoir d'autres : tout élément de $\ker A$ est un équilibre).
L'étude réalisée dans la section permet de caractériser la stabilité de cet équilibre.
**Le cas affine** Considérons maintenant un champ de vecteurs affine $f(x) = Ax + b$ sur $\mathbb{R}^n$,
où $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur.
Un équilibre de l'équation :

$$x'(t) = Ax(t) + b,$$

est un point $x_0$ qui vérifie $Ax_0 + b = 0$ (noter qu'un tel point n'existe que si $b \in \operatorname{Im} A$).
En remplaçant $b$ par $-Ax_0$, on réécrit l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) - x_0\right) = A\left(x(t) - x_0\right),$$

Ainsi la stabilité et la stabilité asymptotique d'un équilibre de l'équation affine $x'(t) = Ax(t) + b$ sont équivalentes respectivement à celles de l'origine pour l'équation linéaire $y'(t) = Ay(t)$.

#### 3.1.2 Fonction de Lyapunov

Une fonction de Lyapunov est une fonction qui permet d'estimer la stabilité locale et globale d'un point d'équilibre. Cette méthode peut également être utilisée pour déterminer la stabilité d'un équilibre non-hyperbolique lorsque la linéarisation ne permet pas de conclure. Pour commencer, définissons ce qu'est une fonction définie positive.

**Définition 8.** [3] *On appelle fonction définie positive (resp. négative) une fonction $V(x, y)$ bien définie, différentiable et de différentielle continue sur un ouvert $U$ contenant l'origine et vérifiant les propriétés suivantes :*
*1. $V(0, 0) = 0$,*
*2. $\forall (x, y) \in U - \{(0, 0)\}, V(x, y) > 0$ (resp. $V(x, y) < 0$ ).*

**Théorème 3** (Cas d'une équation autonome)**.** *Soit $x^* = 0$ un point d'équilibre de l'équation* (3.1)*, s'il existe un voisinage $U$ de 0 et une fonction*

$$V : U \to \mathbb{R}^+,$$

*continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :*
*(i) $V$ soit définie positive,*
*(ii) la dérivée totale $\dot{V}$ pour* (3.1) *soit négative, alors 0 est stable.*

*$V$ s'appelle une fonction de Lyapunov.*
*De plus, si la dérivée totale $\dot{V}$ pour* (3.1) *est définie négative, alors 0 est asymptotiquement stable. $V$ s'appelle une fonction stricte de Lyapunov.*

**Théorème 4.** *Soit $x^* = 0$ un point d'équilibre de l'équation* (3.1), *s'il existe un voisinage $U$ de 0 et une fonction*

$$W : U \to \mathbb{R}^+,$$

*continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :*
*(i) pour tout $(x, y) \in U - \{(0,0)\}, W(x,y) > W(0,0)$,*
*(ii) la dérivée totale $\dot{W}$ pour* (3.1) *soit définie positive, alors 0 est instable.*

**Théorème 5.** *(Cas d'une équation non-autonome) Soit $x^* = 0$ un point d'équilibre de* (3), *s'il existe un voisinage $U_{t_0}$ et une fonction*

$$V : U_{t_0} \to \mathbb{R}^+,$$

*Continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :*
*(i) $V$ soit définie positive,*
*(ii) la dérivée totale $\dot{V}$ pour* (3) *soit négative (respectivement définie négative), alors 0 est stable, $V$ s'appelle une fonction de*

*Lyapunov. De plus, si on a :*
*(iii) $V$ est décroissante, alors 0 est uniformément stable (respectivement uniformément asymptotiquement stable).*
*De plus, si on a :*
*(iv) $U = \mathbb{R}^n$ et si $V$ est radialement non-borné, alors 0 est globalement uniformément stable( respectivement globalement uniformément asymptotiquement stable).*

**Théorème 6.** [4] *Si l'équation différentielle* (3.1) *admet un fonction de Lyapunov en un équilibre $x_0$, alors $x_0$ est un équilibre stable. Si de plus la fonction de Lyapunov est stricte, alors $x_0$ est asymptotiquement stable.*

**Démonstration :** Soit $L : U \to \mathbb{R}$ la fonction de Lyapunov. Quitte à remplacer la fonction $L(x)$ par $L(x) - L(x_0)$, on suppose que $L(x_0) = 0$. Et quitte à remplacer $U$ par une boule fermée centrée en $x_0$, on le suppose compact. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors $\alpha > 0$ tel que l'ensemble $U_\alpha = \{x \in U : L(x) \leq \alpha\}$ est inclus dans la boule ouverte $B(x_0, \varepsilon)$ (en effet, sinon il existe une suite de points $x_n \in U$ en dehors de $B(x_0, \varepsilon)$ vérifiant $\lim L(x_n) = 0; U$ étant compact, $x_n$ a alors un point d'accumulation $\bar{x} \neq x_0$, qui doit vérifier $L(\bar{x}) = 0$, ce qui est impossible d'après la propriété $(a)$ ).

Or, d'après la propriété $(b)$ de $L$, pour tout $x \in U_\alpha$, la solution $\phi_t(x)$ est confinée dans $U_\alpha$; ceci montre la stabilité de l'équilibre

$x_0$. ▹ Supposons maintenant que $L$ est une fonction de Lyapunov stricte. D'après ce qui précède, on peut choisir un réel $\alpha > 0$ tel que $U_\alpha$ soit inclus dans l'intérieur de $U$. Notons que $U_\alpha$ est compact (fermé car $L$ est continue et borné car inclus dans $U$ ). Considérons un point $x \in U_\alpha$ différent de $x_0$. La fonction $t \mapsto L\left(\phi_t(x)\right)$ étant strictement décroissante et minorée par 0 , elle a une limite $\ell$ quand $t \rightarrow +\infty$. D'autre part, $U_\alpha$ étant compact, il existe une suite $t_n, t_n \rightarrow +\infty$, telle que $\phi_{t_n}(x)$ est convergente. Notons $\bar{x}$ la limite de cette dernière suite. Par continuité de $L$, $\bar{x}$ vérifie

$$L(\bar{x}) = \lim_{t_n \rightarrow \infty} L\left(\phi_{t_n}(x)\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} L\left(\phi_t(x)\right) = \ell$$

De plus, pour tout $s > 0$, on a

$$L\left(\phi_s(\bar{x})\right) = \lim_{t_n \rightarrow \infty} L\left(\phi_{s+t_n}(x)\right) = \ell$$

ce qui montre que $s \mapsto L\left(\phi_s(\bar{x})\right) \equiv L(\bar{x})$ n'est pas décroissante, et donc, d'après la propriété $(c)$ de $L$, que $\bar{x} = x_0$.

Ainsi, le seul point d'accumulation de $\phi_t(x)$ est $x_0$, ce qui montre que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0$ pour tout $x$ dans le voisinage $U_\alpha$ de $x_0$. L'équilibre $x_0$ est donc asymptotiquement stable.

## 3.2 Stabilité d'un systéme dynamique

### 3.2.1 Stabilité d'un point fixe

[5] Dans cette section, nous allons étudier la stabilité des points fixes du flot . Les points fixes sont représentés dans l'espace des phases comme les solutions des états d'équilibre $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = \mathbf{0}$ i.e. les solutions du problème $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \alpha) = \mathbf{0}$.

Le problème qui se pose alors est de savoir si ces points fixes sont temporellement stables. La théorie de l'algèbre linéaire permet de répondre à cette question, en considérant la stabilité des points fixes vis à vis de perturbations infinitésimales.

Supposons que le flot présente un point fixe en $x = x^*$. On peut alors linéariser le système autour de cet état d'équilibre. En posant $y = x - x^*$, ce système s'écrit :

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial t} = \boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{x}^*, \alpha\right) \boldsymbol{y}$$

où $\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{x}^*, \alpha\right)$ est la matrice Jacobienne de $\boldsymbol{F}$ au point $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$. Les solutions du système linéaire à coefficients constants se présentent sous forme d'exponentielles $e^{st}$. La résolution de ce problème est alors équivalente à la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{x}^*, \alpha\right) \boldsymbol{y} = s\boldsymbol{y}.$$

**Théorème 7.** *Considérons* $\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial t} = \boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{x}^*, \alpha\right) \boldsymbol{y}$ *le système linéarisé autour du point d'équilibre* $\boldsymbol{x}^*$ *du flot* $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \alpha)$.

*Soient $\lambda_i, i = 1 \ldots,$ les valeurs propres de l'opérateur linéaire $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^*, \alpha)$, alors*
*- si pour tout $i \in [1; n], \operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ le point fixe $\boldsymbol{x}^*$ est stable.*
*- si il existe $k \in [1; n]$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda_k) > 0$, le point fixe $\boldsymbol{x}^*$ est instable.*

### 3.2.2 Stabilité par l'analyse des valeurs propres

La stabilité par l'analyse des valeurs propres consiste à utiliser la méthode indirecte de Lyapunov qui utilise la linéarisation du système et qui peut, dans certains cas,
apporter une réponse au problème de stabilité locale. L'obtention de la linéarisée du système (1) se fait en d´éterminant son approximation du premier ordre au voisinage d'un point d'équilibre $x_e$ pour une perturbation $\delta x$.
Cette approximation est donnée par le développement du premier ordre de Taylor suivant :

$$f(x_e + \delta x) = f(x_e) + \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x_e} \delta x + o(\delta x)$$

$$\delta \dot{x} = Df_{x_e} \delta x$$

où $Df_{x_e} = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x_e}$ est la matrice Jacobienne du système (1) évaluée au point d'équilibre, et s'obtient de la manière suivante :

$$Df_{x_e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e) & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_e) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_e) & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_e) \end{pmatrix}$$

**Théorème 8.** - *Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $Df_{x_e}$ ont une partie réelle strictement négative, alors $x_e$ est asymptotiquement stable.*
*- S'il existe au moins une valeur propre de $Df_{x_e}$ qui a la partie réelle strictement positive, alors $x_e$ est instable.*
*- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $Df_{x_e}$ ont une partie réelle strictement négative, sauf au moins une qui soit imaginaire pure ou nulle, alors on ne peut rien conclure (le point d'équilibre $x_e$ peut être stable, asymptotiquement stable ou instable).*

**Définition 9.** *Si $Df_{x_e}$ n'a pas de valeurs propres à parties réelles nulles, alors le point d'équilibre $x_e$ est dit hyperbolique.*

#### 3.2.3 Stabilité par le critére de Rooth-Hurwitz

[6] Le critère de Rooth-Hurwitz est utilisé pour l'analyse de la stabilité des équilibres par linéarisation, sans besoin de calculer les valeurs propres de la matrice Jacobienne de la linéarisée. La stabilité est analysée uniquement en examinant les coefficients du polynôme caractéristique correspondant au système linéarisé

autour du point d'équilibre $x_e$. L'équation caractéristique correspondant à la linéarisée du système d'équations différentielles $x'(t) = f(x(t))$ est définie par :

$$\det\left(\lambda I_n - Df_{x_e}\right) = 0$$

De façon plus explicite, l'équation (5) est équivalente à l'équation suivante :

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots . + a_{n-1}\lambda^1 + a_n = 0$$

L'application du critère de Rooth-Hurwitz nécessite la construction d'une matrice $H$ définie à partir des coefficients du polynôme caractéristique de l'équation (6).

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \text{ ou } a_j = 0 \text{ pour } j > n.$$

Les $n$ mineurs de la matrice $H$ sont désignés par les nombres $H_i, i \in \{1, 2, 3 \ldots, n\}$ tel que :
$H_1 = \det(a_1) = a_1, H_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \ldots, H_n = \det H.$
Le critère de Routh-Hurwitz de la stabilité s'énonce alors comme suit :

1. Si tous les mineurs de la matrice $H$ sont strictement positifs alors $x_e$ est asymptotiquement stable.
2. S'il existe un mineur négatif alors $x_e$ est instable.
3. S'il existe un mineur nul et que tous les autres sont positifs, alors on ne peut rien conclure sur la stabilité de l'équilibre.
En dimension 3 , si le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

Alors, la matrice $H$ est

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

avec 3 mineurs :

$$H_1 = a_1 > 0, H_2 = a_1a_2 - a_3 > 0, H_3 = a_3H_2 > 0.$$

D'après le critère de Routh-Hurwitz, on obtient le résultat suivant :

**Proposition 3.** *En dimension 3, si les coefficients du polynôme $P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$, vérifient la condition suivante :*

$$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 - a_3 > 0,$$

*alors les racines de $P$ sont à parties réelles strictement négatives.*

### 3.2.4 Stabilité par des fonctions de Lyapunov

**Théorème 9.** [6]*(Principe d'invariance de LaSalle)*
*L'équilibre $x_e$ de (2) est asymptotiquement stable s'il existe une fonction continue $V$ définie sur un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de $x_e$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, différentiable sur $U \setminus \{x_e\}$ tel que :*
*1. $V(x_e) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq x_e$,*
*2. $\dot{V} \leq 0$ sur $U \setminus \{x_e\}$,*
*3. l'ensemble $S \subset U$ tel que $\dot{V}(x) = 0$ ne contient pas de trajectoire du système autre que $x(t) = x_e$.*
*La dérivée temporelle $\dot{V}(x)$ se calcule comme suit :*

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x).$$

**Théorème 10.** *Considérons une équation différentielle* (3.1) *définie sur $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'elle admette en un équilibre $x_0$ une fonction de Lyapunov stricte $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\|x\| \to +\infty \Rightarrow \|V(x)\| \to +\infty,$$

*Alors le bassin d'attraction de $x_0$ est $\mathbb{R}^n$ tout entier. On dit dans ce cas que l'équilibre $x_0$ est globalement asymptotiquement stable.*

**Démonstration :** Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha = L(x)$. La condition implique que $U_\alpha = \{y \in \mathbb{R}^n : L(y) \leq \alpha\}$ est borné, et donc compact.
On montre alors que $\lim_{t\to\infty} \phi_t(x) = x_0$ exactement de la même

façon que dans la preuve du théorème 6.

# 4 Application

[7] Une structure appropriée du modèle mathématique est nécessaire pour comprendre la dynamique de grande taille de la propagation d'une maladie infectieuse.
Dans cette partie, nous discutons d'un modèle épidémique $SIR$ général qui représente la transmission directe de maladie infectieuse. Le nombre de reproduction $R_0$ est déterminé et le local et les stabilités globales de l'équilibre sans maladie et de l'équilibre endémique sont dérivées.

## 4.1 Travail de cadre modèle

Dans cette section, nous formulons un modèle épidémique pour la propagation d'une maladie infectieuse générale. Nous divisons la population totale $N(t)$ en trois sous-classes distinctes : susceptible $S(t)$, infecté $I(t)$ et rétablie $R(t)$. Le modèle peut être représenté par le système d'équations différentielles suivant.

$$\begin{aligned} \tfrac{dS(t)}{dt} &= \mu - \lambda S(t)I(t) - \mu S(t), \\ \tfrac{dI(t)}{dt} &= \lambda S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ \tfrac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - \mu R(t), \end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$S(0) \geq 0 \quad , I(0) \geq 0 \quad , R(0) \geq 0.$$

Ici $\mu$ est le taux de recrutement et de mort naturelle, $\lambda$ est le taux de contact effectif entre les individus sensibles et infectés et $\gamma$ est le taux de récupération des individus infectés.
En considérant la densité totale de la population, nous avons $S(t) + I(t) + R(t) = 1$
$\Rightarrow R(t) = 1 - S(t) - I(t)$.
Il suffit donc de considérer :

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \mu - \lambda S(t)I(t) - \mu S(t),\\ \frac{dI(t)}{dt} &= \lambda S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t),\end{aligned}$$

La région réalisable pour le système ci-dessus est :

$$\Omega = \left\{(S(t), I(t)) \in R_+^2, \quad S(t) + I(t) \leq 1\right\}.$$

puis :

$$\begin{aligned}S(t) = 0 \Rightarrow \frac{dS(t)}{dt} &= \mu > 0,\\ I(t) = 0 \Rightarrow \frac{dI(t)}{dt} &= 0,\\ \frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} &= -\gamma I(t) \leq 0.\end{aligned}$$

Ainssi : $\Omega$ est positivement invariant.

## 4.2 Analyse de seuil

Dans cette section, nous montrons l'analyse de stabilité.
Le point d'équilibre sans maladie (DFE) est $E_0 = (1, 0)$. Pour trouver le point d'équilibre endémique $E_1 = (S^*, I^*)$, nous mettons le côté droit du système égal à zéro pour obtenir

$$S^* = \frac{\gamma + \mu}{\lambda}, \quad I^* = \frac{\mu}{\lambda}\left(R_0 - 1\right),$$

où : $\mathrm{R}_0 = \frac{\lambda}{\gamma+\mu}$

En épidémiologie mathématique, un concept important est lié au nombre de reproduction de base $R_0$ car il sert de paramètre de seuil qui régit la propagation des maladies infectieuses dans une population. Il est défini comme le deuxième nombre attendu produit à partir d'un seul individu dans une population sensible. Pour toute maladie infectieuse, l'une des préoccupations les plus importantes est sa capacité à envahir une population . Cette capacité peut être exprimée par un paramètre de seuil $R_0$.
Si $R_0 < 1$, alors chaque individu infecté, pendant toute sa période d'infectiosité, produira en moyenne moins d'un individu infecté. Dans le cas DFE, le système est localement asymptotiquement stable, ce qui montre que la maladie sera éliminée de

la population.
Si $R_0 > 1$, alors chaque individu infecté pendant toute sa période d'infectiosité produira moins d'un individu infecté en moyenne période infectieuse ayant des contacts avec des individus sensibles produira plus d'un individu infecté, ce qui conduira ensuite la maladie à envahir la population sensible, et le DFE est instable .

La linéarisation par les critères de Routh Hurwitz autour du point d'équilibre endémique $E_1$ est localement asymptotiquement stable pour $R_0 > 1$.

Pour montrer que le système proposé est globalement asymptotiquement stable, nous utilisons la théorie de la fonction de Lyapunov pour l'équilibre sans maladie et l'équilibre endémique. Nous présentons d'abord la stabilité globale de l'équilibre sans maladie.

**Théorème 11.** *Si $R_0 \leq 1$, alors l'équilibre sans maladie $E_0$ du système est globalement asymptotiquement stable sur $\Omega$.*

**Preuve** Pour établir la stabilité globale de l'équilibre sans maladie , nous construisons la fonction de Lyapunov suivante $V : \Omega \to \mathrm{R}$ :

$$V(S, I) = I(t)$$

En calculant la dérivée temporelle de Vle long de la solution du système proposé, nous obtenons

$$\begin{aligned} V'(t) &= \lambda S(t)I(t) - (\gamma+\mu)I(t) \\ &= (\gamma+\mu)\left(R_0 S(t) - 1\right) I(t) \end{aligned}$$

nous voyons que : $V'(t) \leq 0$ pour $R_0 < 1$
si $R_0 < 1$ ,alors $V'(t) = 0 \Leftrightarrow I(t) = 0$
si $R_0 = 1$ ,alors $V'(t) = 0 \Leftrightarrow S(t) = 1$.
Ainsi, par le principe d'invariance de LaSalle, le point d'équilibre sans maladie $E_0$ est globalement asymptotiquement stable sur $\Omega$.

**Théorème 12.** *L'équilibre endémique $E_1 = (S^*, I^*)$ du système est globalement asymptotiquement stable sur $\Omega$.*

**Preuve :** Pour la stabilité globale de l'équilibre endémique $E_1$, nous construisons la fonction de Lyapunov $L : \Omega_+ \to \mathrm{R}$, où $\Omega + = \{(\mathrm{S}(t), I(t)) \in \Omega \mid \mathrm{S(t)} > 0, I(t) > 0\}$ est donné par

$$L(S,I) = W_1\left[S - S^* \ln\left(\frac{S}{S^*}\right)\right] + W_2\left[I - I^* \ln\left(\frac{I}{I^*}\right)\right]$$

Où $W_1$ et $W_2$ sont des constantes positives à choisir ultérieurement. En prenant la dérivée de la fonction ci-dessus, on a

$$\frac{dL}{dt} = W_1\left(S - S^*\right)\left(-\lambda I - \mu + \frac{\mu}{S}\right) + W_2\left(I - I^*\right)\left(\lambda S - (\gamma+\mu)\right).$$

En considérant le point d'équilibre, nous avons $-\mu = \lambda I^* - \frac{\mu}{S}$ et $-(\gamma+\mu) = -\lambda S^*$.

Donc, la formule ci-dessus L'équation devient

$$\frac{dL}{dt} = \lambda \left(W_2 - W_1\right)\left(S - S^*\right)\left(I - I^*\right) - W_1 \mu \left(S - S^*\right)^2 .$$

pour $W_1 = W_2 = 1$, on a :

$$\frac{dL}{dt} = -\mu \frac{\left(S - S^*\right)^2}{SS^*} \leq 0.$$

on obtient aussi :

$$\frac{dL}{dt} = 0 \Leftrightarrow S = S^*.$$

Par le principe d'invariance de LaSalle, le point d'équilibre endémique Est globalement asymptotiquement stable sur $\Omega$.

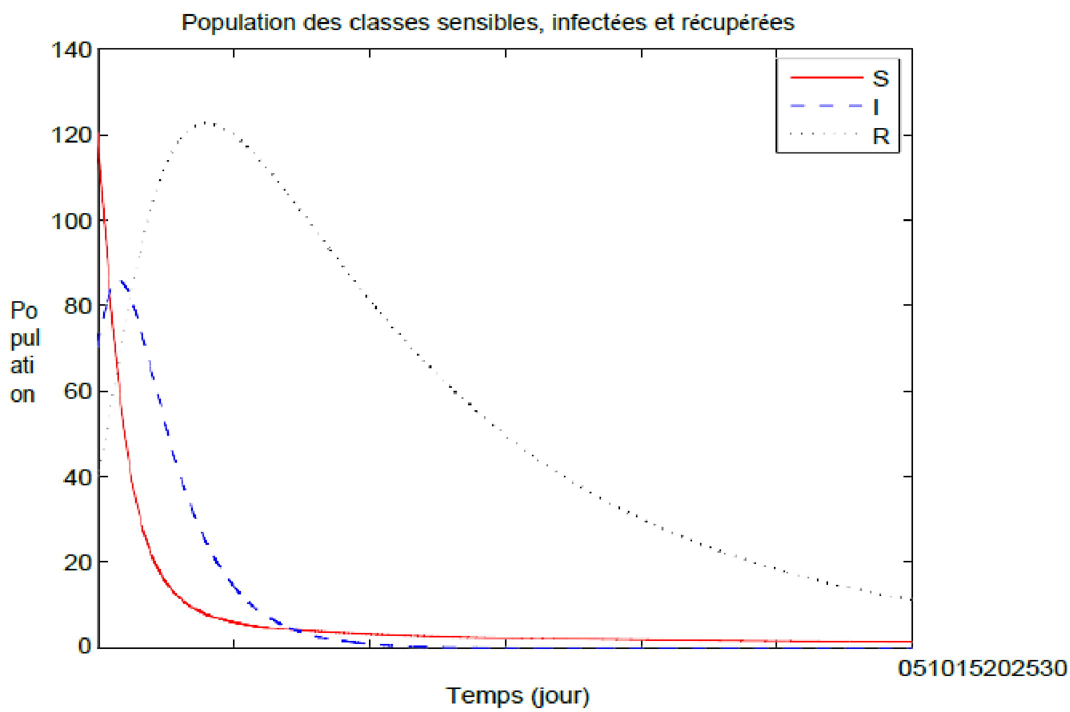


Figure 1 : Le graphique montre la population de sujets sensibles, infectés et individus récupérés.

## 4.3 Simulation

Dans cette section, nous utilisons une méthode itérative pour trouver la simulation numérique. Pour la simulation numérique, nous considérons la valeur du paramètre $\mu = 0,1, \lambda = 0,5$ et $\gamma = 0,0098$. En utilisant le schéma Runge-Kutta d'ordre 4, nous résolvons notre modèle proposé . Les graphiques de la figure 1 .

montrent la population des individus sensibles, infectés et guéris. Nous n'avons pas envisagé de modèle mathématique pour représenter une maladie particulière dans ce rapport , mais notre objectif principal était de montrer que la transmission de l'infection peut être facilement étudiée par des modèles épidémiques. L'analyse du modèle a montré qu'il existe deux équilibres : l'un est l'équilibre sans maladie et l'autre l'équilibre endémique. La dynamique locale du modèle proposé est déterminée par le nombre de reproduction de base $R_0$ qui dépend des valeurs des paramètres. Nous avons également présenté que pour $R_0 \leq 1$ l'équilibre sans maladie est localement asymptotiquement stable tandis que pour $R_0 > 1$ l'équilibre endémique est asymptotiquement stable. l'équilibre endémique existe.

# 5 Bibliographie


[1] Chapitre 3 : Equations différentielles ordinaires, pages 39–57.
https ://www.ljll.math.upmc.fr/ nardoni/polyagrl3/2017/ode.pdf

[2] Théorème de Cauchy-Lipschitz et applications, Lefeuvre thomas et Ginguené franck, 30 mars 2012, page 4.
http ://mult.exemple.free.fr/IMG/pdf/presentation.pdf

[3] Hattaf, Khalid, and Noura Yousfi. "A class of delayed viral infection models with general incidence rate and adaptive immune response." International Journal of Dynamics and Control 4.3 (2016) : 254-265.

[4] Stabilité des équations differentielles ordinaire, Emmanuel Moulay, 2007.
https ://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00136497/document

[5] Stabilité des systémes dynamique, page 225.
https ://www.math.u-bordeaux.fr/ mbergman/PDF/These/annexeB.pdf

[6] Modélisation et analyse mathématique des maladies infectieuses par des équations aux dérivées partielles, E.M. Lotfi, 2017.

[7] Ullah, Roman, Gul Zaman, and Saeed Islam. "Stability analysis of a general SIR epidemic model." VFAST Transactions on Mathematics 1.1 (2013).