

Présenté par :

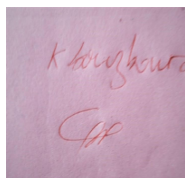
**PROJET DE FIN D'ETUDE POUR L'OBTENTION
DU DIPLOME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES**

Amine FAIZ

**Introduction à la théorie des ensembles
flous et de la logique floue**

Soutenu le 20/06/2022, devant la commission d'examen :

Pr. S. BENKADDOUR	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Président
Pr. Y. EL FOUTAYENI	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Examineur
Pr. M. IZID	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Examineur
Pr. K. BOUZKOURA	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Encadrant



Année Universitaire 2021-2022

Dédicaces

Louange à Dieu tout puissant, qui m'a permis de voir ce jour tant attendu

Je dédie ce modeste travail à :

À

L'âme de mes chers parents,

Tout l'encre du monde ne pourrait suffire pour exprimer mes sentiments envers les défunts irremplaçables, à l'âme de ma Mère Amina et de mon Père Ahmed. Vous avez toujours été mon école de patience, de

confiance et surtout d'espoir et d'amour.

J'espère que je serai les fruits de leur semence et le témoignage de ma grande

fierté de leur avoir eu comme parents

Que Dieu le Tout Puissant leur accorde sa miséricorde.

À

Ma femme Nadia

Pour l'amour et l'affection qui nous unissent. Je ne saurais exprimer ma profonde reconnaissance pour le soutien continu dont tu as toujours fait preuve. Tu m'as toujours encouragé, incité à faire de mon mieux, ton soutien m'a permis de réaliser le rêve tant attendu. Je te dédie ce travail avec mes vœux de réussite, de prospérité et de bonheur.

Je prie Dieu le tout puissant de préserver notre attachement mutuel, et d'exaucer tous nos rêves.

À

Mes trois adorables enfants : Ahmed, Salma et Bilal

Aucune dédicace, ne peut valoir pour exprimer toute ma tendresse et mon affection vis-à-vis de mes trois chers car le fait de savoir qu'ils sont là me donne davantage le courage et la volonté de mener à bien mes travaux,

Puisse le bon Dieu daigne leur faire grandir dans la sagesse, la bonne santé et l'intelligence nécessaire.

À

L'âme du Feu Pr. ElMiloudi MARJIRANI

Je dédie ce modeste travail, aussi, à un professeur passionné et passionnant qui a su nous transmettre son amour des Mathématiques. Hommage à un homme compréhensif et chaleureux qui savait nous écouter, nous conseiller et nous rassurer dans les moments de doute. Toutes mes condoléances à sa petite et grande familles.

À

Mes Amis

Nullle dédicace ne pourrait exprimer ma profonde affection et mon immense gratitude pour

tous les encouragements et le soutien qu'ils ont consentis à mon égard.

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma reconnaissance à la Directrice de ce mémoire, Pr. K. BOUZKOURA, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion et à la réussite de notre projet. Elle a toujours été disponible pour me donner des conseils et pour redresser l'avancement du projet pour produire un travail valorisant.

Messieurs les jurys, Professeurs BENKADDOUR Said, EL FOUTAYENI Youssef et IZID Malika vous nous faites un grand honneur en acceptant de juger ce modeste travail.

Je désire aussi remercier les professeurs de la Faculté des Sciences Ben M'Sick – Département Mathématiques et Informatique, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers les amis et collègues qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Je tiens à remercier chaleureusement, tous mes proches et tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont apporté leurs sollicitudes pour accomplir ce travail.

Dieu merci.

Table des matières

Introduction	7
1 La théorie des sous-ensembles flous	11
1.1 Les ensembles classiques	11
1.1.1 Rappels	11
1.1.2 Notion de la convexité	13
1.2 Sous-ensemble flous	13
1.2.1 Préliminaire et Présentation	13
1.2.2 Les caractéristiques d'un ensemble flou[3]	16
1.2.3 Cardinal d'un sous-ensemble flou et distance entre deux sous-ensembles flous	18
1.2.4 α -coupe et α -coupe fort [3]	18
1.2.5 Etude de convexité	20
1.3 Opérations standards sur les sous-ensemble flous	22
1.3.1 Complément, intersection et réunion des sous-ensembles flous	22
1.3.2 Sous-ensemble flous identiques : Exemples et applications	24
1.4 Structure des sous-ensembles flous :	26
1.4.1 Rappels et définitions	26
1.4.2 Structure ensembliste de $\mathcal{F}(X)$ [2]	26
1.4.3 Différence fondamentale avec la théorie des probabilités	27
2 Généralisation des opérations sur les sous-ensembles flous	29
2.1 Introduction	29
2.1.1 Définitions et propriétés sur les sous ensembles flous	29
2.1.2 Présentation de l'extension des opérations sur les sous-ensemble flous [3]	31
2.2 Complément flou	32
2.2.1 Fonction d'un complément flou	32
2.2.2 Étude du point fixe du complément flou et caractérisation	34
2.3 Intersection et réunion floues	43
2.3.1 Intersection floue : t-norme	43
2.3.2 L'union floue : t-conorme	50
3 Relation floue et logique floue	57
3.1 Relations floues et Base des règles	57
3.1.1 Relations floues [15]	57
3.1.2 Base des règles [20]	58
3.2 Principe du raisonnement approximatif et Inférence floue	59
3.2.1 Inférence floue [13] [17] [20]	59
3.2.2 Principe du raisonnement approximatif	60
3.3 Méthodes principales [15] [5]	60

3.3.1	Méthodes d'implication : Méthode de Mamdani	60
3.3.2	Méthodes de défuzzification	61
4	Modélisation d'un contrôleur flou et Applications	63
4.1	Note de présentation et Problématique	63
4.1.1	Présentation	63
4.1.2	Problématique	64
4.2	Etude et modélisation	66
4.2.1	Étapes de mise en œuvre d'un contrôleur flou	66
4.2.2	Paramétrage des variables linguistiques et Règles d'inférence	67
4.3	Applications	68
4.3.1	Travail demandé	68
4.3.2	Sortie Logiciel MATLAB	74
	Conclusion générale	81
	Bibliographie	82

Table des figures

Figure 1: Système de contrôle d'un réservoir d'eau	8
Figure 2: Axe de la température.	9
Figure 1.1: Exemples des sous-ensembles convexes et non convexes dans \mathbb{R}^2	13
Figure 1.2: Les concepts les plus utilisés de fonctions d'appartenance	14
Figure 1.3: Représentation des fonctions d'appartenance μ_{A_i} .	16
Figure 1.4: Un sous-ensemble flou non-normalisé et convexe.	21
Figure 1.5: Un sous-ensemble flou normalisé et non-convexe.	21
Figure 1.6: A_1 et son complément \bar{A}_1 .	23
Figure 1.7: A_3 et son complément \bar{A}_3 .	23
Figure 1.8: Diagramme $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_3$.	24
Figure 1.9: Graphe des fonctions d'appartenance de A_1 et A_2 .	25
Figure 1.10: Graphe des fonctions d'appartenance de A_1 et A_2 .	25
Figure 1.11: Treillis de Hasse de diviseurs de 60.	26
Figure 2.1: Illustration de la continuité de c .	33
Figure 2.2: Représentation d'une fonction seuil	34
Figure 3.1: Opérateurs d'inférence floue les plus utilisés [12].	60
Figure 3.2: Schéma de principe de la méthode de Mamdani.	61
Figure 4.1: Contrôleur flou	63
Figure 4.2: Boucle de contrôle de rétroaction [14].	64
Figure 4.3: Vanne de régulation.	65
Figure 4.4: Vanne de régulation à tige montante – coupe [14].	65
Figure 4.5: L'opération de moulage de vannes dans une usine de fonderie.	66
Figure 4.6: Vanne en fonte.	66
Figure 4.7: Représentation de la fonction d'appartenance du paramètre h .	69
Figure 4.8: Représentation de la fonction d'appartenance du paramètre dh .	69
Figure 4.9: Représentation de la fonction d'appartenance du paramètre u	69
Figure 4.10: La valeur d'activation de $dh = 0.1$.	71
Figure 4.11: La valeur d'activation de $h = 81.5$.	71
Figure 4.12: L'état final du paramètre de la sortie u (la commande)	73
Figure 4.13: Subdivision des sous ensembles flous de la sortie en surfaces élémentaires.	73
Figure 4.14: Définition du contrôleur flou.	75
Figure 4.15: Les degrés d'appartenance des sous-ensembles flous du paramètre d'entrée h .	76
Figure 4.16: Les degrés d'appartenance des sous-ensembles flous du paramètre d'entrée dh .	76
Figure 4.17: Les degrés d'appartenance des sous-ensembles flous du paramètre de la sortie u .	77
Figure 4.18: Paramétrage des règles et des relations logiques.	77
Figure 4.19: Règles floues en affichage symbolique.	78
Figure 4.20: Paramétrage des règles et relations logiques.	78
Figure 4.21: Visualisation 3D des paramètres du contrôleur flou.	79
Figure 4.22: Reparamétrage de h et dh dans les mêmes plages.	80
Figure 4.23: Reparamétrage de dh hors les plages d'expertise.	80

Liste des tableaux

Tableau 1.1: Représentation des sous-ensembles flous $A - B - C$ et D dans leur universs X .	17
Tableau 2.1: Tableau des classes des générateurs décroissants et celles des t-normes correspondantes [3].	50
Tableau 2.2: Tableau des classes des générateurs croissants et celles des t-conormes correspondantes [3]	56
Tableau 4.1: paramétrage de l'univers de discours de h .	67
Tableau 4.2: paramétrage de l'univers de discours de dh .	67
Tableau 4.3: paramétrage de l'univers de discours de u .	67
Tableau 4.4: Base de règles.	68
Tableau 4.5: Règles activées (activables).	70
Tableau 4.6: Matrice d'inférence floue (tableau de vérité).	70
Tableau 4.7: Agrégation des résultats.	72

« *Les variables linguistiques sont des variables dont les valeurs ne sont pas des nombres mais des mots ou des phrases dans une langue naturelle ou artificielle* [19] »

L.A ZADEH

Dans la vie pratique, certaines décisions humaines sont prises dans des conditions imprécises. Dire que « l'eau est froide », « chaude » ou « tiède » à quel degré de précision ? sous quelles contraintes ? sur quelles plages de vérité ? avec quelle logique ?... Aussi bien l'usage, dans notre vie quotidienne, de *variables linguistiques* « x est petit », « y est très petit », « z est voisin de » ... qui ne sont que des quantificateurs « vagues et flous » et qui témoignent de situations imprécises et incertaines, cet usage rend la décision finale ambiguë. D'où la notion d'un « SOUS-ENSEMBLE FLOU – LOGIQUE FLOUE » et le besoin d'un fondement qui établit l'étude de cette nouvelle approche.

Lotfi Aliasker Zadeh, mathématicien Azeri, ingénieur en électricité et professeur émérite en informatique, était le premier à avoir fondé la théorie des sous-ensembles flous et de la logique floue, à l'aide de cette théorie le monde octroie actuellement des applications directes sur le développement des domaines en parfaite liaison avec l'Intelligence Artificielle.

La théorie de la logique floue est une science mathématique qui étudie l'imprécision et est une extension de la logique classique qui permet de manipuler et modéliser, dans des conditions incertaines, des imperfections des données et se rapproche dans une certaine mesure de la flexibilité, du raisonnement humain. Les ensembles flous dérivent ainsi de cette logique et font appel à des variables linguistiques, et permettent d'étendre la définition des ensembles classiques avec certaines propriétés et adaptations qui seront développées au cours de ce rapport, et qui feront l'objet du chapitre 1 (La théorie des sous-ensembles flous).

La théorie des sous-ensemble flous conduit à étudier certaines opérations sur les ensembles (complément, intersection, réunion ...) et leur généralisation (fonction complément floue, fonctions t-normes, fonctions t-conormes ...) comme sera développé dans le chapitre 2 (Généralisation des opérations sur les sous-ensembles flous).

Pour mieux traduire la finalité de cette notion du "Flou", nous considérons l'exemple introductif suivant :

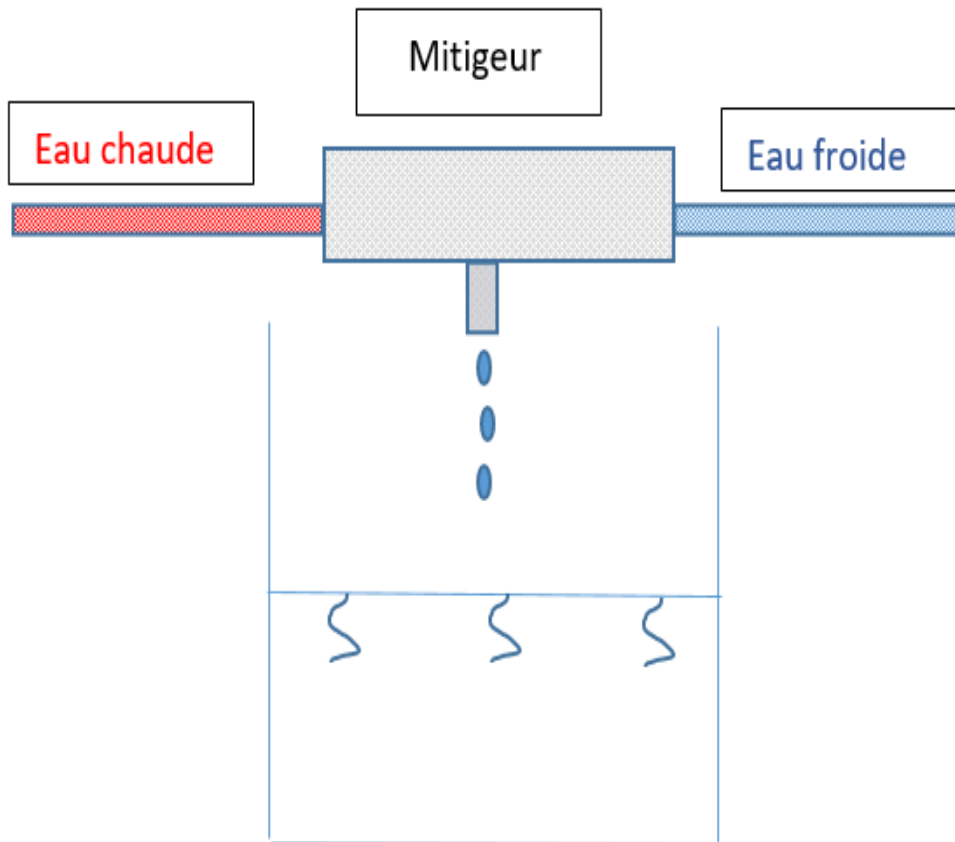


FIGURE 1 – Système de contrôle d'un réservoir d'eau

Soient :

T_F = Température d'eau froide.

T_C = Température d'eau chaude.

T_T = Température d'eau tiède.

En l'absence d'un dispositif de mesure de température on aura des appréciations de la température de l'eau dans le réservoir, avec une certaine marge d'incertitude (selon les variables linguistiques) et l'information souhaitée devient de plus en plus nuancée telle qu'on dira «l'eau est tiède plutôt chaude», ce qui nous ramène également à définir des intervalles de température pour lesquels il n'y aura pas d'incertitude comme par exemple : « L'eau est nettement chaude » ou « vraiment chaude » et des zones où on peut hésiter (floues).

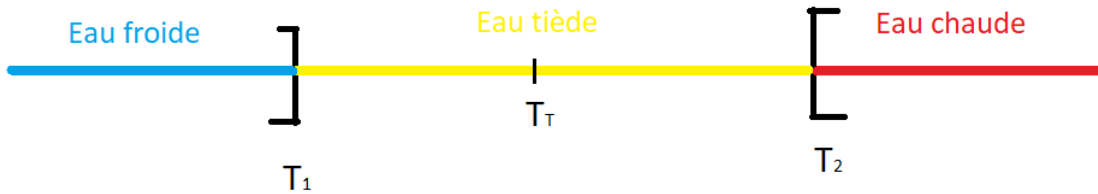


FIGURE 2 – Axe de la température.

Donc :

- ↔ Pour : $T < T_1$, l'eau est froide.
- ↔ Pour : $T = T_1$, l'eau est tiède.
- ↔ Pour : $T > T_1$, l'eau est chaude.
- ↔ Pour : $T \in]T_1, T_T[$, on "hésite" entre froide et tiède.
- ↔ Pour : $T \in]T_T, T_2[$, on "hésite" entre tiède et chaude.

Au niveau du mitigeur qui est la commande de l'état on aura :

- ↔ Si l'eau du réservoir est froide, on va mettre de l'eau chaude.
- ↔ Si l'eau du réservoir est tiède, on va mettre de l'eau tiède.
- ↔ Si l'eau du réservoir est chaude, on va mettre de l'eau froide.

⇒ Cette hésitation de prendre une décision dans de telle situation, permet de définir le principe de la commande « Floue ».

Et par suite la nécessité de trouver une nouvelle approche ou logique pour agréger les variables et donc c'est la 'Logique Floue' ou bien la 'Théorie Floue'.

La notion de la logique floue [20] a vu le jour au milieu du $XX^{\text{ième}}$ siècle, en évoluant selon le cursus suivant :

- ↔ 1965 : Fondation de la théorie de la logique floue par le professeur émérite L.A ZADEH.
- ↔ 1970 : 1^{ère} Application de la théorie dans les domaines : Expertise, Médecine, et Commerce.
- ↔ 1974 : 1^{ère} Application dans le secteur industriel : Régulation floue d'une chaudière le professeur Ebrahim MAMDANI.
- ↔ 1985 : Les japonais étendent l'application de cette logique sur les produits Grand Public.

Après cette présentation sur l'utilité et la nécessité du fondement de la théorie floue, plusieurs domaines d'applications de cette logique (outre que ceux évoqués au paragraphe précédent) sont en suspens et couvrent une bonne partie de la vie humaine, en particulier l'Intelligence Artificielle qui est la tendance et le mot clé du développement de l'humanité actuellement.

Parmi les nombreuses applications de la logique floue, la Commande Floue qui permet d'évaluer les

variables linguistiques et d'agrèger les décisions prises, et qui est l'innovation de cette théorie qui s'avère être le champ d'application le plus actif dans le monde entier.

On peut citer comme commandes floues utilisées à travers le monde :

- Commande des tubes broyeurs pour la fabrication de ciment (Danemark 1979).
- Commande de métros avec fonctionnement plus confortable et économique (Japon 1987).
- Opérateurs, unités arithmétiques et micro-ordinateurs... (domaine Informatique et Réseaux).

Aussi bien, on se retrouve dans d'autres applications pratiques nombrables entre autres :

- La recherche opérationnelle.
- La gestion financière.
- Le contrôle de la production.
- Génie civil et architecture...
-

Le chapitre 3 (Relation floue et logique floue) traite la partie structurelle de la logique floue fondée sur les relations floues et qui constituent une base de prise de décisions selon un phasage bien déterminé.

En fait trois phases principales caractérisent la structure d'une commande floue :

- a. La fuzzification : Lorsque les systèmes à logique floue traitent des variables d'entrée floues et fournissent des résultats sur des variables de sorties elles-mêmes floues.
⇒ C'est l'étape qui consiste à la quantification floue des valeurs réelles d'une variable.
⇒ C'est la modélisation.
- b. L'inférence floue : est une opération logique par laquelle on admet une proposition liée à d'autres précédemment admises (ou requises).
Généralement, dans cette étape, les systèmes étudiés utilisent une expertise (retour d'expérience) exprimée sous forme d'une base de règles booléenne du type :
Si ... Alors ...

$$(\textit{Si} (X \textit{ est } A) \textit{ ALORS} (Y \textit{ est } B))$$

SI le feu est vert ET ma vitesse est faible ALORS j'accélère.

- c. La défuzzification : ou l'agrégation des résultats, cette étape consiste à transformer le sous ensemble flou de sortie en une valeur non floue (réelle) permettant la commande du système étudié.

Dans le dernier chapitre (Modélisation d'un contrôleur flou et Applications) nous avons abouti à une application de la logique floue, faisant appel à la méthode Mamdani, à travers un algorithme et une capitalisation d'une expertise en la matière en adoptant les principales phases d'une commande floue, il s'agit de modéliser un problème de régulation et d'ajustement d'une vanne au cours d'usinage en fonte à l'usine, avec un calcul théorique et un calcul sorti du logiciel Matlab.

Ce travail nous a ramené à fournir plus d'efforts dans la recherche scientifique et à étudier plusieurs exemples d'application pour concrétiser cette théorie.

Le but de ce chapitre est d'introduire les principales composantes de la théorie des ensembles flous, à partir des ensembles classiques sur lesquelles nous établirons un aperçu pour rappel et généralités. Pour cela, nous rappelons les notions et les symboles suivants à usage universel à savoir :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: Ensemble des nombres naturels.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: Ensemble des nombres entiers.
- \mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.
- \mathbb{R}_*^+ : Ensemble des nombres réels positifs non nuls.
- $[a, b],]a, b],]a, b[$: Intervalles fermé, semi-ouvert/fermé, ouvert des nombres compris entre a et b respectivement.
- (x_1, x_2, \dots, x_n) : n-uplets des éléments x_1, x_2, \dots, x_n .
- Soit X un ensemble classique et $A \subset X$ un sous-ensemble de X .
 - Pour exprimer l'appartenance d'un élément x à un ensemble classique A , on écrit : $x \in A$
 - De même pour exprimer que cet élément n'appartient pas à A , on écrit : $x \notin A$

1.1 Les ensembles classiques

1.1.1 Rappels

La fonction caractéristique de A notée par \mathcal{X}_A est la fonction qui déclare l'appartenance d'un élément x à A ou non. Elle définit l'ensemble A par :

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Et par suite, la fonction caractéristique \mathcal{X}_A associe les éléments de l'ensemble X aux éléments de la paire $\{0, 1\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_A : X &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \mathcal{X}_A(x)\end{aligned}$$

La famille de tous les sous-ensembles d'un ensemble donné X est appelé *l'ensemble des parties de X* , noté, généralement $\mathcal{P}(X)$, ou 2^X , ou $\mathcal{B}(X)$ (*Gothique*).

$$A \in \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow A \subset X$$

Remarque : Parfois $\mathcal{P}(X)$ est appelé aussi ensemble puissance.

Soit X un ensemble classique, A , B et C des sous-ensembles de X , et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles $\{A_i / i \in I\}$.

- $\bar{A} = \{x \in X / x \notin A\}$: le complément de A dans X .
- $\bar{\bar{A}} = A$, $\bar{\emptyset} = X$ et $\bar{X} = \emptyset$.
- $A \cup B = \{x \in X / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X / x \in A_i, i \in I\}$.
- $A \cap B = \{x \in X / x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X / x \in A_i, \forall i \in I\}$.
- Propriétés fondamentales des opérations des sous-ensembles classiques :
 - Loi d'involution : $\bar{\bar{A}} = A$.
 - Commutativité : $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.
 - Associativité : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
 - Distributivité : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ et $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
 - Idempotence : $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$.
 - Absorption : $A \cup (A \cap B) = A$ et $A \cap (A \cup B) = A$.
 - Absorption par X et \emptyset : $A \cup X = X$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$.
 - Identité : $A \cap X = A$ et $A \cup \emptyset = A$.
 - Loi de contradiction : $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
 - Lois de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

1.1.2 Notion de la convexité

Dans \mathbb{R} , tout ensemble défini par un seul intervalle de nombres réels est convexe.

Tout ensemble défini par plus d'un intervalle qui ne contient pas certain point entre les intervalles n'est pas convexe.

Analytiquement, $A \subset \mathbb{R}$ est ensemble convexe si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad tx + (1 - t)y \in A \quad \forall t \in [0, 1]$$

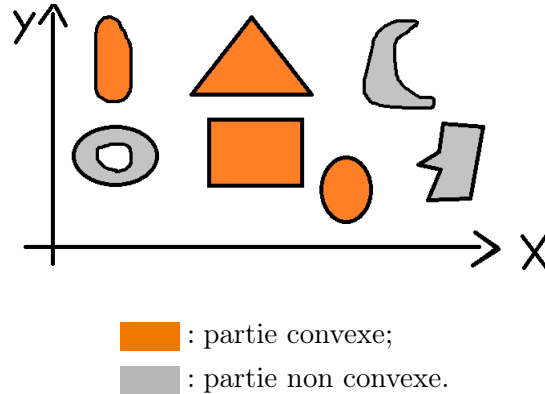


FIGURE 1.1 – Exemples des sous-ensembles convexes et non convexes dans \mathbb{R}^2

1.2 Sous-ensemble flous

1.2.1 Préliminaire et Présentation

Revenons à la notion d'une application caractéristique dans cet exemple :

Exemple : Prenons $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ et $A = \{x_2, x_4, x_5\}$, alors on a :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_A(x_1) = 0 \\ \mathcal{X}_A(x_2) = 1 \\ \mathcal{X}_A(x_3) = 0 \\ \mathcal{X}_A(x_4) = 1 \\ \mathcal{X}_A(x_5) = 1 \end{cases}$$

Nous pouvons interpréter ces résultats en disant :

- x_1 et x_3 sont de poids 0, ou de degré d'appartenance égal à 0, ou n'appartiennent pas à A .
- x_2 et x_4 sont de poids 1, ou de degré d'appartenance égal à 1, ou appartiennent à A .

Ce qui revient à dire que A peut être réécrit comme suit :

$$A = \{(x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 0), (x_4, 1), (x_5, 1)\}$$

Comme si nous avons : $A = \{(x_i, \mathcal{X}_A(x_i)) / x_i \in X\}$.

Ou plus généralement : $A = \{(x, \mathcal{X}_A(x)) / x \in X\}$.

De même pour le complément : $A^c = \{x_1, x_2\}$.

Que nous pouvons A réécrire sous la forme :

$$A = \{(x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 0), (x_4, 1), (x_5, 1)\}$$

Ce qui revient à écrire : $A^c = \{(x, \mathcal{X}_{A^c}(x)) / x \in X\} = \{(x, 1 - \mathcal{X}_A(x)) / x \in X\}$

Donc, nous avons vu qu'il est possible de représenter, autrement, les sous-ensembles d'un ensemble classique avec une notation de poids d'un élément de cet ensemble $(x, 1)$ ou $(x, 0)$. Comme défini précédemment, la fonction caractéristique d'un ensemble classique peut prendre les valeurs 0 et 1 selon l'appartenance à cet ensemble. Cette fonction peut être généralisée, et peut prendre des valeurs dans une plage entre 0 et 1 attribuées à des éléments de l'ensemble universel, que nous appellerons le **degré d'appartenance** de ces éléments à l'ensemble considéré.

Plus que le degré d'appartenance est élevé, plus que les éléments se situent dans l'ensemble considéré. Une telle fonction est appelée : **fonction d'appartenance**, elle définit et caractérise ainsi un **sous ensemble flou**.

Soient X un ensemble classique et A un sous-ensemble de X .

Définition 1.1 [3] [5] Une fonction μ_A est dite **fonction ou degré d'appartenance** de A si elle est définie sur X par :

$$\begin{aligned} \mu_A : X &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto 0 \leq \mu_A(x) \leq 1 \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi noter ou confondre la fonction d'appartenance μ_A par : $A(x)$.

Mathématiquement, un **sous-ensemble flou** A de X est une application qui associe chaque élément x de X à son degré d'appartenance $\mu_A(x)$ à A tel que :

$$A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in X\}$$

Sur d'autres ouvrages, il est souvent noté : $A = \{\mu_A(x) / x : x \in X\}$

La fonction d'appartenance peut prendre plusieurs formes d'interprétation. Les concepts les plus utilisés de fonctions d'appartenance peuvent être :

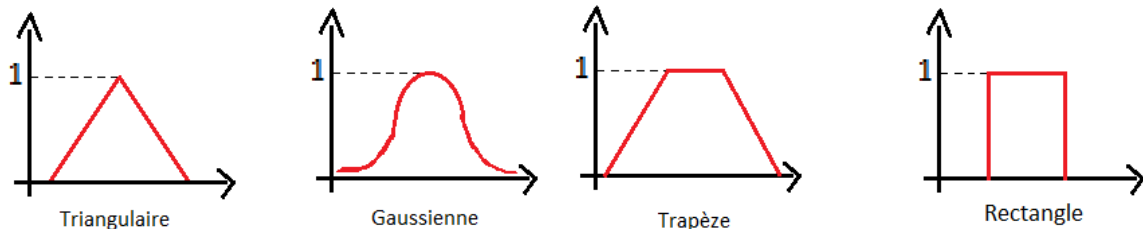


FIGURE 1.2 – Les concepts les plus utilisés de fonctions d'appartenance

Dans le cas où X n'est pas fini, nous écrivons :

$$A = \int_X \mu_A(x) / x \quad (/x \text{ une notation})$$

et lorsque X est fini, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$A = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) / x_i$$

Ces expressions d'intégrale et de la somme finie sont juste des notations pour exprimer la notion du poids d'appartenance de chaque élément de X .

Les sous-ensembles flous permettent de représenter des concepts vagues et larges exprimés en langage naturel ou ce qu'on appelle « *la variable linguistique* ».

La représentation dépend non seulement du concept, mais aussi du contexte dans lequel il est utilisé.

Pour mieux introduire les concepts basiques des sous-ensembles flous et leur terminologie, nous allons étudier un exemple de cas d'âges.

Exemple : Soient trois ensembles flous A_1 , A_2 et A_3 qui représentent les tranches d'âges d'une jeune, moyenne personnes et personne âgée.

Les fonctions d'appartenance μ_{A_i} , $i = \{1, 2, 3\}$, seront définies sur l'intervalle $[0, 80]$ comme suit :

$$A_1(x) = \mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{si } x \leq 20 \\ \frac{35-x}{15} & , \text{si } 20 < x < 35 \\ 0 & , \text{si } x \geq 35 \end{cases}$$

(Sous-ensemble flou A_1 : " jeune ")

$$A_2(x) = \mu_{A_2}(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x \leq 20 \text{ ou } x \geq 60 \\ \frac{x-20}{15} & , \text{si } 20 < x < 35 \\ 1 & , \text{si } 35 \leq x \leq 45 \\ \frac{60-x}{15} & , \text{si } 45 < x < 60 \end{cases}$$

(Sous-ensemble flou A_2 : " âge moyen ")

$$A_3(x) = \mu_{A_3}(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x \leq 45 \\ \frac{x-45}{15} & , \text{si } 45 < x < 60 \\ 1 & , \text{si } x \geq 60 \end{cases}$$

(Sous-ensemble flou A_3 : " personne âgée ")

Les fonctions d'appartenance μ_{A_i} , $i = \{1, 2, 3\}$ peuvent être représentées graphiquement par :

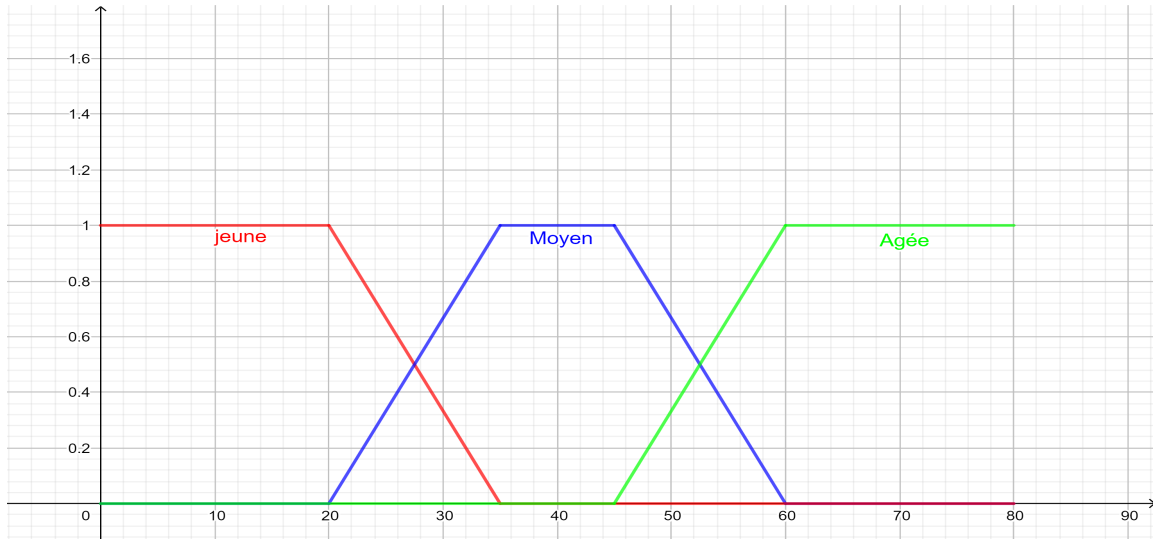


FIGURE 1.3 – Représentation des fonctions d'appartenance μ_{A_i} .

1.2.2 Les caractéristiques d'un ensemble flou[3]

Définition 1.2 (Support d'un sous-ensemble flou) Soit A un sous-ensemble flou d'un ensemble classique X , le support de A est l'ensemble qui contient tous les éléments de X qui ont des degrés d'appartenance non nuls dans A .

Il est noté par : $\text{supp}(A)$ ou $\delta(A)$.

$$\text{supp}(A) = \{x \in X / A(x) > 0\} = \delta(A)$$

Définition 1.3 (Noyau d'un sous-ensemble flou) Le noyau d'un sous-ensemble flou $A \subset X$ noté $N(A)$ est défini par :

$$N(A) = \{x \in X / A(x) = 1\}$$

Définition 1.4 (Hauteur d'un sous-ensemble flou) La hauteur d'un sous-ensemble flou $A \subset X$, notée $h(A)$ est la plus grande valeur obtenue par la fonction d'appartenance de ce sous-ensemble flou.

$$h(A) = \sup_{x \in X} A(x)$$

- Si $h(x) = 1$, A est dit un sous-ensemble flou normalisé.
- Si $h(x) < 1$, A est dit un sous-ensemble flou non-normalisé.

Exemple : [18] Soit l'ensemble union de discours X

$$X = \{5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85\}$$

1. Exprimer la fonction (ou le degré) d'appartenance des sous-ensembles flous suivants :

$$\Leftrightarrow A = \{ \text{enfants} \}.$$

$\varphi \rightarrow C = \{ \text{jeune} \}$.

$\varphi \rightarrow D = \{ \text{adulte} \}$.

$\varphi \rightarrow E = \{ \text{senior} \}$.

2. Trouver les supports et les hauteurs et les α -coupes.

Alors :

Age	A	B	C	D
5	0	0	0	0
15	0	0,2	0	0
25	0	0,8	0,8	0
35	0	1	0,9	0
45	0	0,6	1	0
55	0	0,5	1	0,3
65	0	0,1	1	0,9
75	0	0	1	1
85	0	0	1	1

TABLE 1.1 – Représentation des sous-ensembles flous $A - B - C$ et D dans leur universs X .

• Support :

* $supp(A) = \{ x \in X / A(x) > 0 \} = \emptyset$

* $supp(B) = \{ 15, 25, 35, 45, 55, 65 \}$

* $supp(C) = \{ 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85 \}$

* $supp(D) = \{ 55, 65, 75, 85 \}$

• Hauteur :

$$h(A) = 0 \text{ et } h(B) = h(C) = h(D) = 1$$

B, C et D sont des ensembles flous normalisés.

1.2.3 Cardinal d'un sous-ensemble flou et distance entre deux sous-ensembles flous

Soit X un ensemble classique, et soit A un sous-ensemble flou de X .

Le cardinal scalaire ou la cardinalité de A , noté par $|A|$, est le nombre défini par :

$$|A| = \sum_{x \in X} A(x)$$

Exemple : Pour $X = \mathbb{N}$ et A le sous ensemble flou de X défini sur $\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ par les fonctions d'appartenance correspondantes $A(x_i)$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } |A| &= 0,1/7 + 0,5/8 + 0,8/9 + 1/10 + 0,8/11 + 0,5/12 + 0,1/13 \\ &= \sum_{i=7}^{13} A(x_i) / x_i \\ &= \{(7, 0.1); (8, 0.5); (9, 0.8); (10, 1); (11, 0.8); (12, 0.5); (13, 0.1)\} \\ \Rightarrow |A| &= \sum_{i=7}^{13} A(x_i) = 3,8 \end{aligned}$$

Quand X est non discret, nous écrivons le cardinal de A (ou cardinalité scalaire de A) comme étant :

$$|A| = \int_X A(x) / x.$$

Définition 1.5 (Distance de Hamming) Une distance peut être définie entre deux sous-ensembles flous $A, B \in X$. On écrit alors :

$$d(A, B) = \sum_{x \in X} |A(x) - B(x)|$$

La distance d est dite distance de "Hamming".

La notion de distance entre deux sous ensembles flous peut être utile pour définir des relations telles que "à peu près égal" ou "très supérieur à"...

1.2.4 α -coupe et α -coupe fort [3]

Une des principales caractéristiques des sous-ensembles flous, est le concept α -coupe et α -coupe fort.

Définition 1.6 Soit A un sous-ensemble flou, défini sur un ensemble classique X , et soit $\alpha \in [0, 1]$ un nombre réel. Nous appelons α -coupe de A , notée ${}^\alpha A$, l'ensemble défini par :

$${}^\alpha A = \{x \in X / A(x) \geq \alpha\}$$

Et α -coupe fort de A noté ${}^{\alpha+} A$ l'ensemble défini par :

$${}^{\alpha+} A = \{x \in X / A(x) > \alpha\}$$

Exemple :

1.

$$\text{supp}(A) = \{x \in X / A(x) > 0\} = \delta(A) = {}^0_+ A$$

2. $\forall \alpha \in]0, 1[$ (suite de l'exemple de la page : 15)

- ${}^0 A_1 = \{x \in [0, 80] / A_1(x) \geq 0\} = [0, 80]$.
- ${}^0 A_2 = \{x \in [0, 80] / A_2(x) \geq 0\} = [0, 80]$.
- ${}^0 A_3 = \{x \in [0, 80] / A_3(x) \geq 0\} = [0, 80]$.
- ${}^\alpha A_1 = \{x \in [0, 80] / A_1(x) \geq \alpha\} = [0, 35 - 15\alpha]$.
- ${}^\alpha A_2 = \{x \in [0, 80] / A_2(x) \geq \alpha\} = [15\alpha + 20, 60 - 15\alpha]$.
- ${}^\alpha A_3 = \{x \in [0, 80] / A_3(x) \geq \alpha\} = [15\alpha + 45, 80]$.

3. $\forall \alpha \in [0, 1[$

- ${}^{\alpha_+} A_1 =]0, 35 - 15\alpha[$.
- ${}^{\alpha_+} A_2 =]15\alpha + 20, 60 - 15\alpha[$.
- ${}^{\alpha_+} A_3 =]15\alpha + 45, 80[$.

L'ensemble de tous les niveaux $\alpha \in [0, 1]$ qui représentent des α -coupes distincts d'un sous-ensemble flou est appelé *un ensemble de niveau* noté \wedge , et défini comme suit :

$$\wedge(A) = \{\alpha \in [0, 1] / A(x) = \alpha, \forall x \in X\}$$

(où \wedge définit l'ensemble de niveau du sous-ensemble flou A)

Définition et proposition 1.1 Soient A et B des sous-ensembles ordinaires d'un ensemble classique X . Alors on a :

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow \forall x \in A, (\mu_A(x) = 1 \Rightarrow \mu_B(x) = 1) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X, \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \end{aligned}$$

Proposition 1.1 [3] Soient A un sous-ensemble flou d'un ensemble classique X et $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$, tel que $\alpha_1 < \alpha_2$. Alors nous avons :

$${}^{\alpha_2} A \subset {}^{\alpha_1} A \quad \text{et} \quad {}^{\alpha_2_+} A \subset {}^{\alpha_1_+} A$$

Preuve : Soit A un sous ensemble flou d'un ensemble classique X , et soient α_1 et α_2 dans $[0, 1]$ tels que : $\alpha_1 < \alpha_2$.

Par définition : ${}^{\alpha_1} A = \{x \in X / A(x) \geq \alpha_1\}$ et ${}^{\alpha_2} A = \{x \in X / A(x) \geq \alpha_2\}$.

$$y \in {}^{\alpha_2} A \Rightarrow \forall y \in X, A(y) \geq \alpha_2$$

$$\Rightarrow \forall y \in X, A(y) \geq \alpha_1$$

Soit

$$\Rightarrow \forall y \in X, y \in {}^{\alpha_1} A$$

$$\Rightarrow {}^{\alpha_2} A \subset {}^{\alpha_1} A \text{ (d'après la définition et la proposition 1.1)}$$

De même, nous aurons ${}^{\alpha_2_+} A \subset {}^{\alpha_1_+} A$.

□

Corollaire 1.1 Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$, tels que $\alpha_1 < \alpha_2$

- $\alpha_1 A \cap \alpha_2 A = \alpha_2 A$; $\alpha_1 A \cup \alpha_2 A = \alpha_1 A$
- $\alpha_{1+} A \cap \alpha_{2+} A = \alpha_{2+} A$; $\alpha_{1+} A \cup \alpha_{2+} A = \alpha_{1+} A$

Preuve : Montrons que

$$\alpha_1 A \cap \alpha_2 A = \alpha_2 A.$$

Pour $\alpha_1 < \alpha_2$

On a : $\alpha_2 A \subset \alpha_1 A \cap \alpha_2 A$

Comme $\alpha_1 < \alpha_2$, alors $\alpha_2 A \subset \alpha_1 A$ (d'après la proposition 1.1).

D'où $\alpha_1 A \cap \alpha_2 A = \alpha_2 A$.

Car [si $x \in \alpha_1 A \cap \alpha_2 A$, alors $x \in \alpha_1 A$ et $x \in \alpha_2 A \implies A(x) \leq \alpha_1$ et $A(x) \leq \alpha_2 \implies x \in \alpha_2 A$

Montrons que : $\alpha_1 A \cup \alpha_2 A = \alpha_1 A$.

Nous avons $\alpha_1 A \subset \alpha_1 A \cup \alpha_2 A$.

Maintenant, soit $x \in \alpha_1 A \cup \alpha_2 A$, alors $x \in \alpha_1 A$ ou $x \in \alpha_2 A$.

Or, $\alpha_1 < \alpha_2$ donc $\alpha_2 A \subset \alpha_1 A$.

Et par suite $x \in \alpha_1 A$. D'où $\alpha_1 A \cup \alpha_2 A = \alpha_1 A$.

On procède par le même raisonnement pour $\alpha_+ A$.

□

Exemple : [suite de l'exemple de la page : 17 - TABLE 1.1]

α -coupes :

↔ Pour l'ensemble B :

$$\alpha B = \{ x \in X / B(x) \geq \alpha \}$$

$$\begin{aligned} - \text{ Pour } \alpha = 0,2 : {}^{0,2}B &= \{ x \in X / B(x) \geq 0,2 = 20\% \} \\ &= \{ 15, 25, 35, 45, 55 \} \end{aligned}$$

$$- \text{ Pour } \alpha = 0,4 : {}^{0,4}B = \{ x \in X / B(x) \geq 0,4 \} = \{ 25, 35, 45, 55 \}$$

1.2.5 Etude de convexité

Sur \mathbb{R}^n , l'étude des sous-ensembles flous permet de définir des propriétés très importantes, à partir des ensembles classiques $X \subset \mathbb{R}^n$, et qui se caractérisent par la propriété de la convexité.

Afin de rendre la convexité généralisée conforme à la définition classique, il est nécessaire que les α -coupes d'un sous-ensemble flou convexe soient convexes pour tout $\alpha \in]0, 1]$ au sens classique.

Illustration :

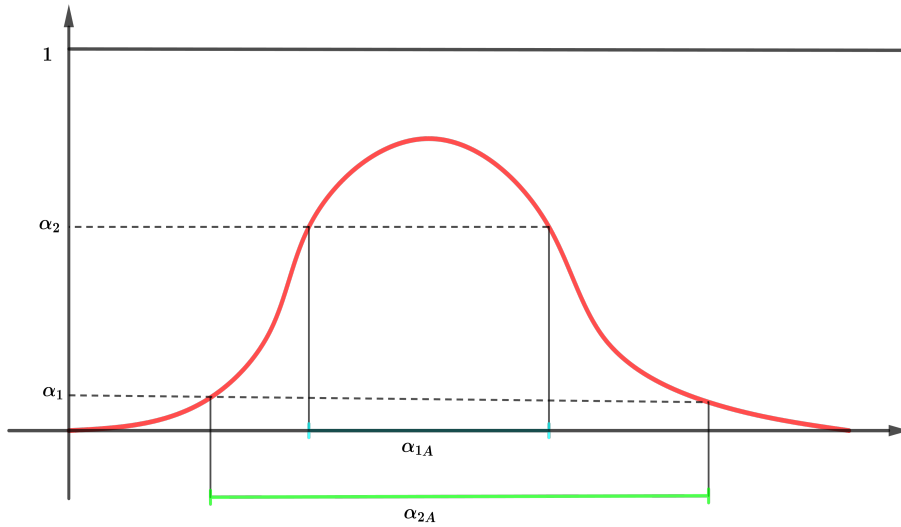


FIGURE 1.4 – Un sous-ensemble flou non-normalisé et convexe.

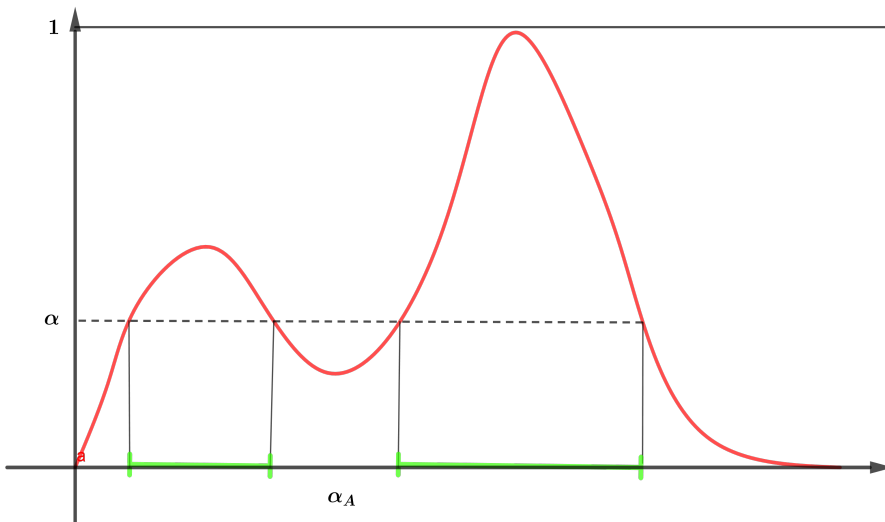


FIGURE 1.5 – Un sous-ensemble flou normalisé et non-convexe.

Définition 1.7 [3] *un sous-ensemble flou A de l'ensemble $X \subset \mathbb{R}$, est convexe si :*
 $\forall x_1, x_2 \in X$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$, la fonction d'appartenance vérifie :

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{A(x_1), A(x_2)\}$$

Théorème 1.1 [2] *Soit A un sous-ensemble flou dans \mathbb{R} , A est convexe si et seulement si toutes ses α -coupes ${}^\alpha A$ sont convexes, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, i.e :*

$$\forall x_1, x_2 \in {}^\alpha A \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ on a : } \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in {}^\alpha A$$

Preuve :

\Rightarrow] Soit A un sous-ensemble flou convexe de \mathbb{R} , alors

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0, 1] : A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{A(x_1), A(x_2)\}$$

Soit $\alpha \in [0, 1]$ un réel donné.

- Si ${}^\alpha A = \emptyset$ ou ${}^\alpha A$ contient qu'un seul point : alors ${}^\alpha A$ est convexe.
- Soient $x_1, x_2 \in {}^\alpha A$, i.e : $A(x_1) \geq \alpha$ et $A(x_2) \geq \alpha$, donc

$$\min\{A(x_1), A(x_2)\} \geq \alpha$$

Et alors :

$$A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{A(x_1), A(x_2)\} \geq \alpha$$

D'où

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in {}^\alpha A, \forall \lambda \in [0, 1]$$

\Leftarrow] Supposons que ${}^\alpha A$ est convexe dans X pour tout $\alpha \in [0, 1]$.

Soient $x_1, x_2 \in X$. On pose $A(x_2) = \beta$

- Si $\alpha \neq 0$, nous avons : $\forall x_1, x_2 \in {}^\alpha A$; $A(x_1) \geq \alpha$ et $A(x_2) \geq \alpha$.

Supposons que $A(x_1) \geq A(x_2)$ (idem si $A(x_2) \geq A(x_1)$), alors $x_1, x_2 \in {}^\beta A$

Comme ${}^\alpha A$ est convexe, alors

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in {}^\beta A, \forall \lambda \in [0, 1]$$

Donc :

$$A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \beta = A(x_2) = \min\{A(x_1), A(x_2)\}$$

Ainsi A est convexe.

□

1.3 Opérations standards sur les sous-ensemble flous

1.3.1 Complément, intersection et réunion des sous-ensembles flous

Soit A un sous ensemble flou d'un ensemble classique X

Définition 1.8 [3] *Le complément d'un sous-ensemble flou A noté \bar{A} est défini par :*

$$\bar{A}(x) = 1 - A(x)$$

Si $A(x) = \bar{A}(x)$ alors, $A(x) = 1 - A(x)$ ce qui donne :

$$A(x) = 0,5$$

x est appelé un point d'équilibre (ou point fixe) de A , qui correspond à un degré d'appartenance égal à 0,5.

Définition 1.9 [3] Soient A et B deux sous ensembles flous, d'un ensemble classique X . L'intersection entre A et B est définie par :

$$(A \bar{\cap} B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}$$

Et la réunion par :

$$(A \bar{\cup} B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}$$

Nous confondons toujours $(A \bar{\cap} B)(x)$ par $\mu_{A \bar{\cap} B}(x)$ la fonction d'appartenance de $A \bar{\cap} B$, et $(A \bar{\cup} B)(x)$ par $\mu_{A \bar{\cup} B}(x)$ la fonction d'appartenance de $A \bar{\cup} B$.

Exemple : En réitérant les sous-ensembles flous A_1 , A_2 et A_3 (Figure 1.3). Nous obtenons :

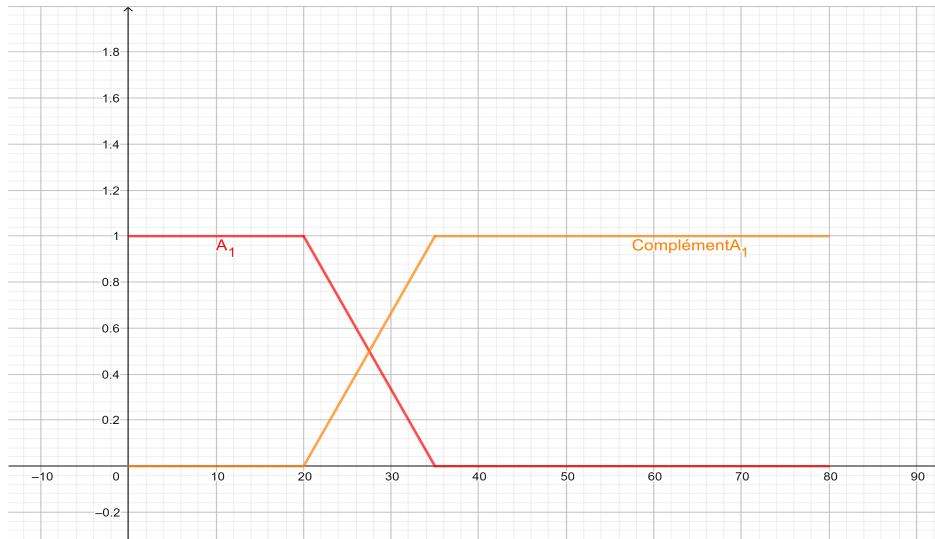


FIGURE 1.6 – A_1 et son complément \bar{A}_1 .

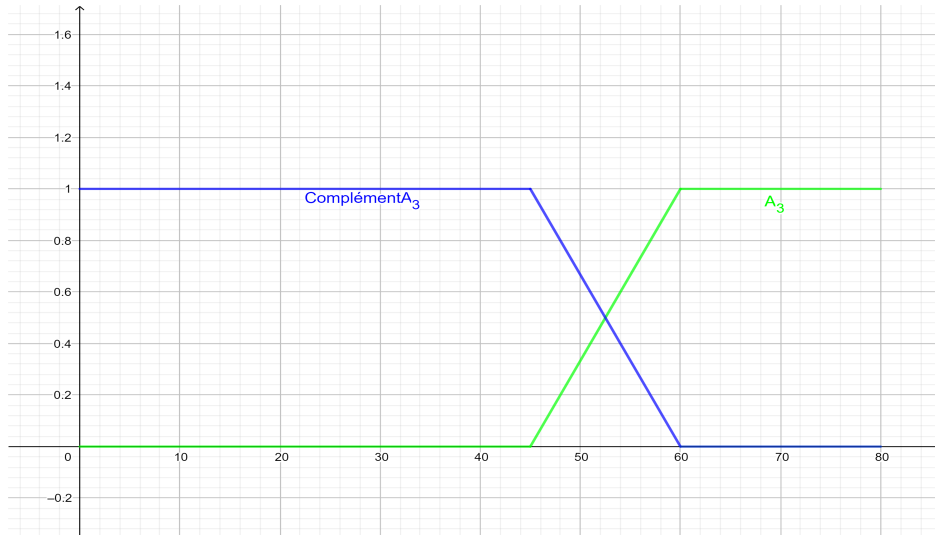


FIGURE 1.7 – A_3 et son complément \bar{A}_3 .

$$A_1 = \{(0, 1); (10, 1); (20, 1); (30, 0.32); (35, 0); (40, 0); (50, 0); (60, 0); (70, 0); (80, 0)\}$$

$$\bar{A}_1 = \{(0, 0); (10, 0); (20, 0); (30, 0.68); (35, 1); (40, 1); (50, 1); (60, 1); (70, 1); (80, 1)\}$$

$$A_1 \bar{\cup} \bar{A}_1 = \{(0, 1); (10, 1); (20, 1); (30, 0.68); (35, 1); (40, 1); (50, 1); (60, 1); (70, 1); (80, 1)\}$$

$$A_1 \bar{\cap} \bar{A}_1 = \{(0, 0); (10, 0); (20, 0); (30, 0.32); (35, 0); (40, 0); (50, 0); (60, 0); (70, 0); (80, 0)\}$$



FIGURE 1.8 – Diagramme $\bar{A}_1 \bar{\cap} \bar{A}_3$.

Nous constatons que le diagramme de $\bar{A}_1 \bar{\cap} \bar{A}_3$ n'est autre que celui de A_2 .

Interprétation : Une personne n'est ni jeune (\bar{A}_1), ni âgée (\bar{A}_3) est une personne moyennement âgée (A_2) : ce qui est logique.

La loi de la contradiction n'est pas vérifiée pour les sous-ensembles flous, i.e $(A \bar{\cap} \bar{A})(x) = \min\{A(x), 1 - A(x)\} = 0$ n'est pas satisfaite. Donc $A \bar{\cap} \bar{A} \neq \emptyset$, et la loi de "tiers exclu" : $A \bar{\cup} \bar{A} = X$, n'est pas satisfaite aussi. Mais il y a des lois qui restent valables comme la loi d'absorption [3] qui est vérifiée pour les sous-ensembles flous, i.e si A et B deux sous-ensembles flous de X , alors :

$$A \bar{\cup} (A \bar{\cap} B) = A \quad (1.1)$$

$$(1.1) \Leftrightarrow (\max\{A(x), (A \bar{\cap} B)(x)\} = A(x) \quad (\forall x \in X))$$

$$\Leftrightarrow (\max\{A(x), \min\{A(x), B(x)\}\} = A(x) \quad (\forall x \in X))$$

En effet, deux cas se présentent :

i. Si $A(x) \leq B(x)$. Alors :

$$\max\{A(x), (A \bar{\cap} B)(x)\} = \max\{A(x), A(x)\} = A(x) \Rightarrow (1.1) \text{ est vérifiée}$$

ii. Si $A(x) > B(x)$. Alors :

$$\max\{A(x), (A \bar{\cap} B)(x)\} = \max\{A(x), B(x)\} = A(x) \Rightarrow (1.1) \text{ est vérifiée}$$

1.3.2 Sous-ensemble flous identiques : Exemples et applications

Définition 1.10 Soient A et B deux sous-ensembles flous de X , on dit que $A \equiv B$, i.e A est identique à B lorsque :

$$\forall x \in X : A(x) = B(x).$$

Par convention [2] [3], $\forall x \in X : \emptyset(x) = 0$ et $X(x) = 1$.

Un sous-ensemble flou d'un ensemble classique est un sous-ensemble généralisé de cet ensemble, selon l'indication de Kaufmann.

Toutefois nous gardons le terme « flou » pour différencier l'ensemble étudié, et ce que nous appelons « univers » X , n'est pas forcément flou.

Exemple : Soient $A_1 = \{ \text{personne est jeune} \}$, $A_2 = \{ \text{personne est très jeune} \}$ des sous-ensembles flous, avec l'âge d'une personne jeune est entre 0 et 80 ans et l'âge d'une personne très jeune est entre 0 et 50 ans

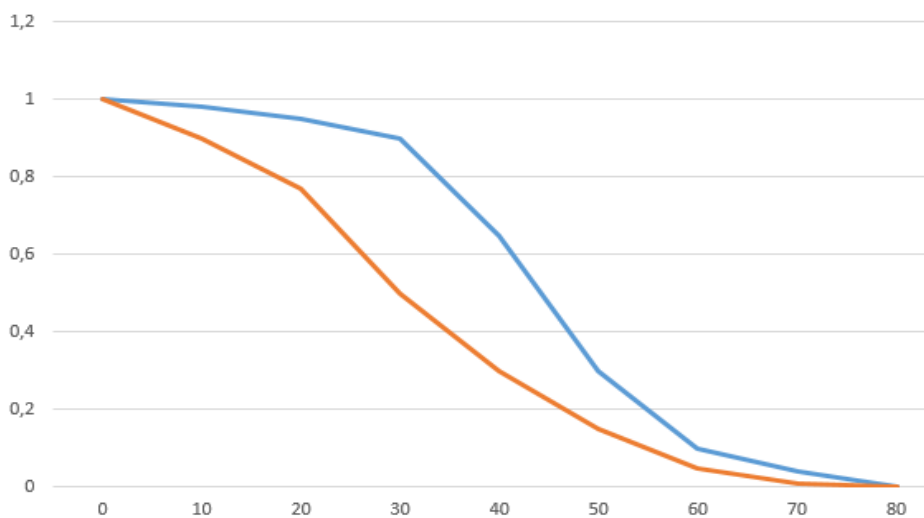


FIGURE 1.9 – Graphe des fonctions d'appartenance de A_1 et A_2 .

Pour $x = 30$ (à l'âge de 30 ans) $A_1(30) = 0,9$ et $A_2(30) = 0,5$

Exemple : Soient $A_1 = \{ \text{nombre réel proche de zéro} \}$, $A_2 = \{ \text{nombre réel très proche de zéro} \}$ des sous-ensembles flous, avec $\forall x \in \mathbb{R} A_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\forall x \in \mathbb{R} A_2(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

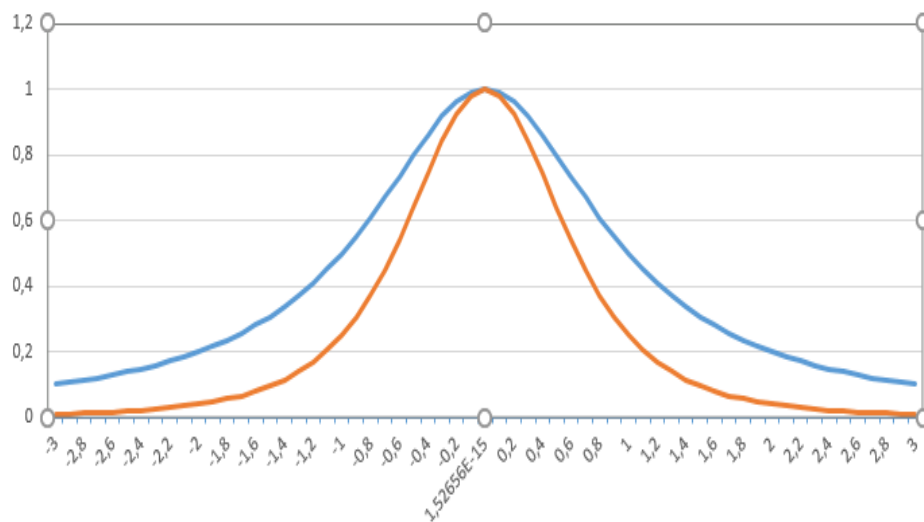


FIGURE 1.10 – Graphe des fonctions d'appartenance de A_1 et A_2 .

$$A_1(1) = 0,5 = A_1(-1)$$

$$A_1(2) = 0,2 = A_1(-2)$$

$$A_1(0) = 1 = A_2(0)$$

$$A_2(1) = 0,25 = A_2(-1)$$

$$A_2(2) = 0,04 = A_2(-2)$$

1.4 Structure des sous-ensembles flous :

1.4.1 Rappels et définitions

X un ensemble classique. L'ensemble de parties de X , noté généralement $\mathcal{P}(X)$ est un ensemble partiellement ordonné pour les relations : $\cup_{\text{réunion}}$, $\cap_{\text{intersection}}$ et $\subset_{\text{inclusion}}$

Nous disons qu'un ensemble L muni d'une relation d'ordre partiel (ou partiellement ordonné) est un treillis [2] ssi :

$$\forall a, b \in L, \exists! c \in L, \exists! d \in L : c = \inf\{a, b\} \text{ et } d = \sup\{a, b\}$$

Autrement dit : chaque paire d'élément de L admet une et unique borne inférieure et une et unique borne supérieure.

Exemple : Pour l'ensemble des diviseurs de 60, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$, ordonnés par la relation de divisibilité, on obtient le diagramme de Hasse suivant :

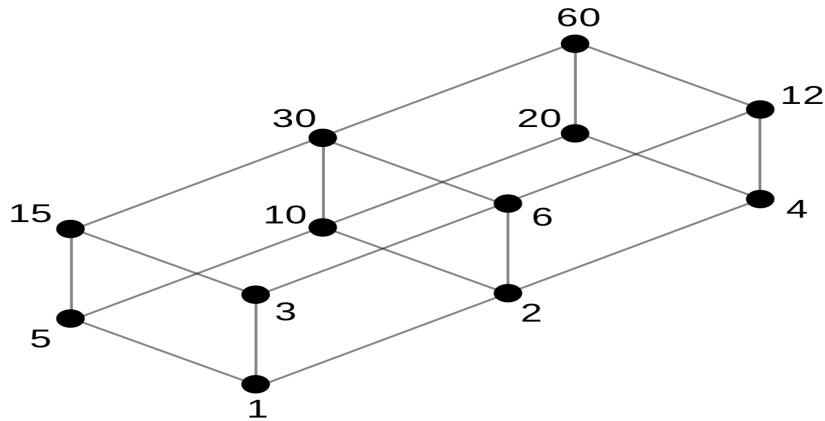


FIGURE 1.11 – Treillis de Hasse de diviseurs de 60.

Définition 1.11 [2] L est dite complétement ssi : X admet un plus petit élément p et un plus grand élément q et on a $\forall a \in L, \exists \bar{a} \in L$

i) $\inf\{a, \bar{a}\} = p$

ii) $\sup\{a, \bar{a}\} = q$

Un treillis admettant un plus petit élément p et un plus grand élément q est dit un treillis complet. Et un treillis complet et distributif (par rapport aux lois internes définies sur l'ensemble L) est dit un treillis booléen.

Dans un treillis booléen, le complément \bar{a} de a est unique.

- La structure de $\mathcal{P}(X)$, peut être vue, comme induite de celle de $\{0, 1\}$ qui est un cas particulier d'un treillis booléen ($\mathcal{P}(X)$ est isomorphe à $2^X (= \{ f : X \rightarrow \{0, 1\} \})$)

1.4.2 Structure ensembliste de $\mathcal{F}(X)$ [2]

Définition 1.12 Soit X un ensemble classique. Nous désignons par $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble de parties de sous-ensembles flous de X .

i.e $A \in \mathcal{F}(X)$ alors, A est un sous ensemble flou de X .

La structure de $\mathcal{F}(X)$ peut être directement déduite de celle de l'intervalle $[0, 1]$.

($\mathcal{F}(X)$ est considéré comme l'ensemble des applications de X sur $[0, 1]$, et peut donc être considéré comme un treillis dans lequel l'intersection et l'union floues standards jouent les rôles, respectivement, de la borne inf et de la borne sup. Et il est même distributif, et complétement pour la loi du complément flou standard.

A partir de cette structure, $\mathcal{F}(X)$ vérifie, majoritairement, les mêmes lois et propriétés [2] de l'intersection et l'union comme pour les ensembles classiques. Pour A, B et C trois sous ensembles flous de l'ensemble classique X :

1. Commutativité : $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.
2. Associativité : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. Idempotence : $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$.
4. Distributivité : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ et $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
5. $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup X = X$
6. Identité : $A \cap X = A$ et $A \cup \emptyset = A$.
7. Absorption : $A \cup (A \cap B) = A$ et $A \cap (A \cup B) = A$.
8. Lois de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
9. Loi d'involution : $\overline{\overline{A}} = A$.
10. Formule d'équivalence : $(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{A \cup B}) = (\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap B})$
11. Différence symétrique : $(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap B}) = (\overline{A \cup B}) \cap (\overline{A \cup B})$

NB : Seules les lois du Milieu Exclu et de la contradiction- [3], qui ne sont pas vérifiées pour les sous-ensembles flous :

$$A \cap \overline{A} \neq \emptyset \text{ et } A \cup \overline{A} \neq X$$

1.4.3 Différence fondamentale avec la théorie des probabilités

Au début, nous sommes tenté de dire, qu'étant donné $A \subset X$, si $x \in A$ avec un degré d'appartenance $\mu_A(x)$, alors $x \in A$ avec des chances.

Si par exemple $\mu_A(x) = 0,5 = 50\%$ ceci signifie que $x \in X$ avec 50% de chances, donc consciemment, ou inconsciemment nous raisonnons d'une façon probabiliste.

Or, il faut bien voir que la théorie des sous ensembles flous n'a rien à voir avec la théorie des probabilités et c'est d'ailleurs dans ce but que le rappel sur les treillis et de l'algèbre de Boole a été fait.

En effet, une probabilité est définie sur une famille d'ensembles qui forment au moins un **treillis complétement** ou **une algèbre de Boole** (dans le cas général, c'est une σ -**algèbre** de Boole ou tribu) c'est-à-dire où chaque élément est complétement, et a un complémentaire unique, complémentaire dans le sens de la théorie de l'algèbre de Boole.

Or, la définition, quoique naturelle, de la complémentation au sens des sous-ensembles flous, n'est pas comparable avec celle des ensembles (dits vulgaires), qu'on a étudié jusqu'à maintenant en mathématiques.

De plus, les lois $\bar{\cup}$ et $\bar{\cap}$ sur les sous-ensembles flous utilisées en association avec les opérateurs *max* et *min* constituent une généralisation de la réunion et de l'intersection des ensembles classiques. Il faut ajouter que les degrés d'appartenance, sont subjectifs et si l'on veut, nous pouvons les choisir comme ne répondant à aucune loi probabiliste.

La valuation du flou n'est pas une mesure statistique, dans le sens où la mesure statistique concerne des événements incertains, alors que le flou traite de l'imprécis non mesurable.

2.1 Introduction

Dans la théorie des ensembles classiques, parmi les notions de base, figure la notion "d'égalité" d'ensembles et de sous-ensembles :

- ↔ Deux ensembles A et B sont égaux, s'ils contiennent exactement les mêmes éléments.
- ↔ Un ensemble A est un sous-ensemble de B , si chaque éléments de A appartient à B .

En raison de cette importance, il est pratique de généraliser ces notions pour les sous ensembles flous.

Dans la théorie des ensembles flous, quand il s'agit de concepts "états imprécis", nous faisons appel au degré d'appartenance. Ce qui nous ramène, à définir et mettre en évidence, logiquement, un degré de sous-ensemble. Pour évaluer le degré de sous-ensemble entre deux sous-ensembles flous A et B , nous faisons recours aux notions du complément, de l'union et de l'intersection (selon les opérateurs standards sur les sous-ensembles flous). Et du fait qu'on exprime les degrés de $A \cup B$ et $A \cap B$, respectivement par :

$$(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}$$

$$(A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}$$

Il est raisonnable, de faire exprimer le degré de sous-ensemble, et d'égalité d'ensembles en fonction de l'union et de l'intersection.

- Pour les ensembles classiques généralement : $A \cap B \subseteq A$. Et

$$A \subseteq B \text{ si et seulement si } A \cap B = A \text{ (ou si et seulement si } A \cup B = B)$$

2.1.1 Définitions et propriétés sur les sous ensembles flous

Définition 2.1 (Treillis de De Morgan [3])

Un treillis de De Morgan est défini par la donnée de la paire $(\mathcal{F}(X), \overline{\quad})$, ($\overline{\quad}$: l'inclusion sur les sous ensembles flous qui définit un ordre partiel sur $\mathcal{F}(X)$), pour laquelle, un élément A de $\mathcal{F}(X)$ est un sous-ensemble flou de B , et noté par $A \overline{\subseteq} B$ si :

$$A(x) \leq B(x), \quad \forall x \in X.$$

Proposition 2.1 Pour $A, B \in \mathcal{F}(X)$ on a : $A \overline{\subseteq} B \Leftrightarrow A \overline{\cap} B = A$ et $A \cup B = B$

Preuve :

Supposons que $A \subseteq B$ donc : $A(x) \leq B(x)$, $\forall x \in X$

Nous avons $(A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\} = A(x)$, $\forall x \in X$

Donc $A \cap B = A$

De même,

$$A \cup B(x) = \max\{A(x), B(x)\} = B(x)$$

Pour l'implication inverse, nous supposons que : $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$, alors pour tout $x \in X$:

$$A(x) = (A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\} \leq \max\{A(x), B(x)\} = (A \cup B)(x) = B(x)$$

□

Cette proposition établit une équivalence entre les deux définitions du treillis :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\} = A(x) \text{ et } (A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\} = B(x)$$

Soient A et B deux ensembles classiques. Pour vérifier si A est un sous-ensemble de B , nous considérons le ratio : $\frac{|A \cap B|}{|A|} \geq 0$: appelé degré de sous-ensemble [10].

- $0 \leq \frac{|A \cap B|}{|A|} \leq 1$.
- $\frac{|A \cap B|}{|A|} = 1$ si et seulement si A est un sous-ensemble de B .

En effet : Si

$$\frac{|A \cap B|}{|A|} = 1 \tag{2.1}$$

Nous avons généralement, $A \cap B \subseteq A$.

D'après 2.1 : $A \cap B = A$ et donc $A \subseteq B$.

Réciproquement, si A est un sous-ensemble de B .

Alors $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow \frac{|A \cap B|}{|A|} = 1$.

Nous considérons A et B deux sous-ensembles flous d'un ensemble classique X .

Par définition du cardinal de A : $|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$.

Sans perdre de généralité, nous allons considérer l'univers de discours X discrètement défini par : $X = \{1, 2, \dots, n\}$, le sous-ensemble flou $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ et le sous ensemble flou $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.

En utilisant la définition de la fonction d'appartenance pour $(A \cap B)$ et $A \cup B$ et de A , nous aurons :

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= \sum_{x \in X} \mu_{A \cap B}(x) = \sum_{i=1}^n \min(a_i, b_i) \\ |A \cup B| &= \sum_{x \in X} \mu_{A \cup B}(x) = \sum_{i=1}^n \max(a_i, b_i) \\ |A| &= \sum_{x \in X} \mu_A(x) = \sum_{i=1}^n a_i \end{aligned}$$

Définition 2.2 [10] Le degré de sous-ensembles flous A et B est défini par le ratio :

$$d_{\subseteq}(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \min(a_i, b_i)}{\sum_{i=1}^n a_i} = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \bar{S}(A, B)$$

Appelé aussi degré de similitude.

De même, est défini le degré d'égalité (ou de similarité) :

$$d_{=} (A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \min(a_i, b_i)}{\sum_{i=1}^n \max(a_i, b_i)} = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} = \bar{E}(A, B)$$

Interprétation : Plus $\bar{S}(A, B)$ est petit (proche de 0), plus il y a des éléments de A qui ne font pas partie de l'intersection $A \cap B$, et donc ne font pas partie de B .

Ce qui montre, pour les ensembles classiques, que ce rapport peut être visualisé comme une mesure raisonnable du degré auquel A est un sous-ensemble de B . Par analogie, au degré de sous-ensemble,

Nous avons :

- Généralement : $A \cap B \subseteq A \cup B$, et
- $A = B$ ssi $A \cap B = A \cup B$.

- $\bar{E}(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} = \frac{\sum_{i=1}^n \min(a_i, b_i)}{\sum_{i=1}^n \max(a_i, b_i)} \leq 1$

Il est facile de voir que $\bar{E}(A, B) = 1 \iff \forall i; a_i = b_i \iff A = B$

2.1.2 Présentation de l'extension des opérations sur les sous-ensemble flous [3]

Comme nous pouvons constater selon les études précédentes, que les opérations standards sur les sous ensembles flous sont pratiquement les mêmes que celles sur les ensembles classiques (voire qu'elles généralisent les opérations sur les ensembles classiques).

L'étude entamée repose sur l'examen et la satisfaction, par chaque'une de ces opérations : le complément, l'intersection et l'union flous, de certains axiomes fondamentaux (ou axiomes squelettes) proprement justifiés et structurés.

Nous identifierons les fonctions-intersection flous par des fonctions appelées **t-normes** et celles de l'union floue par des **t-conormes**.

Parmi la grande variété de ces trois opérations sur les sous ensembles flous, c'est qu'elles possèdent une particularité significative telle que la propriété de α -coupe et de α -coupe fort : cette propriété peut être vue comme le pont qui assure le lien entre les ensembles flous et classiques et permet aussi de définir une étape très importante dans la logique floue (chapitre 3) qui est l'inférence floue.

2.2 Complément flou

2.2.1 Fonction d'un complément flou

Soit X un ensemble classique, et soit A un sous-ensemble flou sur X .

Comme déjà étudié sur les opérations standards sur les sous ensembles flous, nous allons définir le complément de A noté \overline{A} , comme étant l'ensemble avec le degré d'appartenance $\overline{A}(x)$ tel que :

$$\overline{A}(x) = \overline{A(x)} = 1 - \mu_A(x) = 1 - A(x)$$

Par extension de la notion de la complémentarité nous noterons par la suite, \overline{A} par A^c le complément flou du sous ensemble flou $A \subset X$.

Soit $\mu_{A^c}(x)$ le degré d'appartenance à A^c qui exprime aussi le degré duquel x n'appartient pas à A .

Par analogie, le sous-ensemble flou A^c sera défini par son degré d'appartenance μ_{A^c} tel que :

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in X$$

Posons $\mu_{A^c}(x) = c(\mu_A(x))$, où c est une fonction définie par :

$$\begin{aligned} c : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ y &\longmapsto c(y) = 1 - y \quad \forall y \in [0, 1] \end{aligned}$$

Comme μ_A ne dépend pas formellement de x [3], alors l'argument de la fonction c est un nombre y qui varie sur $[0, 1]$. La fonction c est bien définie et appelée fonction de complément flou.

Proposition 2.2 [3] *La fonction c satisfait les axiomes suivants :*

- *Axiome c_1 : $c(0) = 1$; $c(1) = 0$: Conditions aux limites.*
- *Axiome c_2 : Soient $a, b \in [0, 1]$ tels que $a \leq b$ alors, $c(a) \geq c(b)$: c-à-d c est décroissante.*
- *Axiome c_3 : c est continue.*
- *Axiome c_4 : $c(c(a)) = a$, $\forall a \in [0, 1]$ donc c est involutive.*

Les axiomes c_1 et c_2 constituent un squelette axiomatique pour les compléments flous.

Pour l'axiome c_4 , il peut être vérifié du fait que :

$$\begin{aligned} c(c(\mu_A(x))) &= c(1 - \mu_A(x)) = 1 - (1 - \mu_A(x)) = 1 - 1 + \mu_A(x) = \mu_A(x) \quad , \quad \forall x \in X \\ \implies c[c(\mu_A(x))] &= \mu_A(x) \quad , \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Théorème 2.1 [3] *Soit c une fonction définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ qui satisfait les axiomes c_2 et c_4 . Alors c satisfait aussi les axiomes c_1 et c_3 . De plus c est une bijection sur $[0, 1]$.*

Preuve :

i. Comme c est à valeurs dans $[0, 1]$, alors $c(0) \leq 1$.

$$\implies c(c(0)) \geq c(1) \quad (\text{Axiome } c_2)$$

$$\implies 0 \geq c(1) \quad (\text{Axiome } c_4)$$

Et aussi $c(1) \geq 0$ (car c est à valeur dans $[0, 1]$). Donc $c(1) = 0$.

Aussi on a

$$c(c(1)) = c(0) = 1 \quad (\text{Axiome } c_4)$$

Et par suite c vérifie l'axiome c_1 .

ii. D'après l'axiome c_4 , $\forall a \in [0, 1]$, c est involutive c'est à dire $c(c(a)) = a$.

Comme $c(a) \in [0, 1]$, on pose $b = c(a) \in [0, 1] \implies c(b) = c(c(a)) = a \quad \forall a \in [0, 1]$. Donc c est surjective.

Soient $a_1, a_2 \in [0, 1]$ tels que $c(a_1) = c(a_2)$ alors $c(c(a_1)) = c(c(a_2)) \implies a_1 = a_2$ (car c est involutive axiome c_4), donc c est injective.

Conclusion : c est bijective.

Comme c est bijective et satisfait l'axiome c_2 , alors c ne peut avoir aucun point de discontinuité.

En fait, supposons que c admet un point de discontinuité a_0 .(voir figure 2.1)

Alors, on aura $\lim_{a \rightarrow a_0^-} c(a) = b_0 > c(a_0)$

(Car $a < a_0$ donc $c(a) > c(a_0)$: axiome c_2)

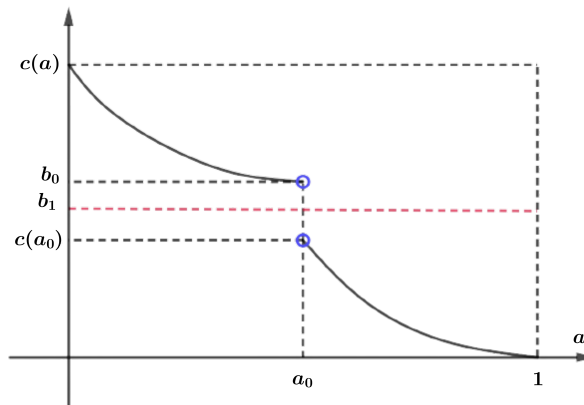


FIGURE 2.1 – Illustration de la continuité de c .

Selon le graphe de c , et par la discontinuité au point a_0 , il existe $b_1 \in [0, 1]$ tel que : $c(a_0) < b_1 < b_0$ pour lequel il n'existe aucun $a_1 \in [0, 1]$ tel que $c(a_1) = b_1$ (b_1 sort de la courbe de c).

Ce qui est absurde car c est une bijection.

□

Exemple : [Fonction-seuil] La fonction c définie par :

Pour tout $t \in [0, 1]$, t fixé

$$c(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq t \\ 0 & \text{si } a > t \end{cases}$$

est une fonction complément flou qui vérifie le squelette axiomatique pour les compléments flous, i.e c satisfait les axiomes c_1 et c_2 .

En fait :

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} c(0) = 1 \\ c(1) = 0 \end{array} \right\} \text{ (axiome } c_1).$$

Pour $a, b \in [0, 1]$: tel que $a \leq b$.

$$\Leftrightarrow a \leq t \text{ alors } c(a) = 1 \geq c(b).$$

$$\Leftrightarrow t < a \text{ alors, } t < a \leq b \implies c(a) = c(b) = 0.$$

Donc c est décroissante (axiome c_2).

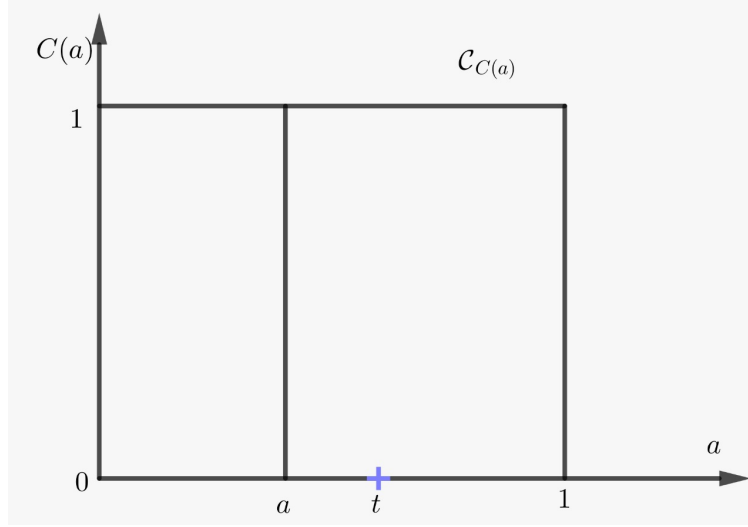


FIGURE 2.2 – Représentation d'une fonction seuil

D'autres propriétés pour les compléments flous, révèlent d'une importance particulière, lorsque les degrés d'appartenance aux sous-ensembles complémentaires flous se rivalisent.

Dans la suite on identifiera le complément flou par la fonction c .

2.2.2 Étude du point fixe du complément flou et caractérisation

Lorsque les sous ensembles flous A et A^c d'un ensemble classique X coïncide en un point, on parle donc d'un point fixe d'une fonction c .

Définition 2.3 [3] Soit c une fonction du complément flou : $[0, 1] \mapsto [0, 1]$.

Le point fixe e_c d'un complément flou A^c est un point dont le degré d'appartenance à un sous-ensemble flou A coïncide avec celui de A^c , et il est exprimé par :

$$c(e_c) = e_c, \quad e_c \in [0, 1]$$

Théorème 2.2 [3] Tout complément flou admet au plus un point fixe.

Preuve : Soit A^c un complément flou d'un sous-ensemble A flou dans X , lié à la fonction c . Le point fixe de c est la solution de l'équation $c(a) - a = 0$, pour $a \in [0, 1]$.

Généralement, nous devons montrer que l'équation

$$c(a) - a = b \tag{2.2}$$

où $b \in \mathbb{R}$, admet au plus une solution.

Supposons qu'il existe $a_1, a_2 \in [0, 1]$ avec $a_1 \neq a_2$ deux solutions de (2.2) avec $a_1 < a_2$.

(Si $a_1 > a_2$: on procède avec le même raisonnement), alors :

$$c(a_1) - a_1 = b = c(a_2) - a_2 \tag{2.3}$$

Comme c est décroissante puisque $a_1 \neq a_2$ (d'après l'axiome c_2), alors $c(a_1) > c(a_2)$. et donc $-a_1 > -a_2 \Leftrightarrow c(a_1) - a_1 > c(a_2) - a_2$. Ce qui est absurde avec (2.3).

□

Proposition 2.3 [3]

Si un complément flou A^c lié à la fonction c qui a un point fixe, alors :

$$a \leq c(a) \text{ si } a \leq e_c \text{ et } a \geq c(a) \text{ si } a \geq e_c \quad a \in [0, 1]$$

Preuve : Soit $a \in [0, 1]$.

Supposons que $a \leq e_c$.

Comme c est une fonction de complément flou, elle vérifie l'axiome $c_2 \Rightarrow c(a) \geq c(e_c)$.

e_c est un point fixe de $c \Rightarrow c(e_c) = e_c$.

$\Rightarrow c(a) \geq e_c \geq a$.

De même pour l'autre si $a \geq e_c$.

Réciproquement, supposons que $a \leq c(a)$, $\forall a \in [0, 1]$.

Comme e_c est un point fixe de $c \Rightarrow c(e_c) = e_c$.

En fait si $a > e_c \Rightarrow c(a) < c(e_c) \Rightarrow c(a) < e_c \Rightarrow a \leq c(a) < e_c \Rightarrow a < e_c$ absurde.

Donc $a \leq e_c$.

□

Définition 2.4 [3] Soit c un complément flou, et a un degré/fonction d'appartenance qui a ses valeurs dans $[0, 1]$. Un point dual par rapport à c de a , tout élément ${}^d a \in [0, 1]$ qui vérifie

$$c\left({}^d a\right) - {}^d a = -[c(a) - a] = a - c(a).$$

Théorème 2.3 [3] Si un complément flou c admet un équilibre (i.e point fixe) alors :

$${}^d e_c = e_c \quad .$$

Preuve : Soit e_c le point fixe du complément flou c .

Alors

$$c(e_c) = e_c \tag{2.4}$$

Le point dual de c par rapport à a (degré d'appartenance a) est défini par :

$$\forall a \in [0, 1]; \quad c\left({}^d a\right) - {}^d a = a - c(a)$$

D'après 2.4, on a : $c(e_c) - e_c = 0$.

En particulier si $a = e_c$, on a :

$$c(e_c) - e_c = 0 \implies e_c - c(e_c) = 0 \implies e_c - c(e_c) = -[c(e_c) - e_c].$$

Par unicité du point fixe (théorème 2.2). il convient que ${}^d e_c = e_c$.

□

L'existence du point fixe de la fonction c nous donne des caractérisations énormes au complément flou : Avant tout, on commence par prouver l'existence d'un point fixe de c .

Théorème 2.4 [3] Si c un complément flou continu, alors c admet un unique point fixe.

Preuve : Le point fixe e_c de c est la solution de l'équation :
 $c(a) - a = 0$ est le cas particulier de l'équation $c(a) - a = b$, $b \in [-1, 1]$, (b constante réelle).
 Posons $h(a) = c(a) - a, \forall a \in [0, 1]$

Par l'axiome c_1 : $\begin{cases} c(0) = 1 \\ c(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h(0) = c(0) - 0 = 1 \\ h(1) = c(1) - 1 = -1 \end{cases}$

h est continue puisque c l'est.
 Donc par T.V.I, il existe un $e_c \in [0, 1]$ tel que $h(e_c) = 0 \Rightarrow c(e_c) - e_c = 0$ (existence).
 Et par le théorème 2.2, e_c est unique.

□

Définition 2.5 (Générateur croissant) [3]

Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

- i. g continue sur $[0, 1]$.
- ii. $g(1) = 0$.
- iii. g est strictement croissante sur $[0, 1]$.

Alors g est dite un **générateur croissant** sur $[0, 1]$.

Définition 2.6 (Générateur décroissant) [3]

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

- i. f continue sur $[0, 1]$.
- ii. $f(1) = 0$.
- iii. f est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

Alors f est dite un **générateur décroissant** sur $[0, 1]$.

Exemple : [Générateur croissant]

Générateur de Yager : $a^\omega = g_\omega(a)$, $a \in [0, 1]$ et $\omega > 0$.

- i) g est continue sur $[0, 1]$, par définition.
- ii) $g(0) = 0^\omega = 0$.
- iii) g est strictement croissante.

En effet, g est continue sur $[0, 1]$, de plus g est croissante sur $]0, 1]$, car nous avons :

$$g'_\omega(a) = \omega a^{\omega-1} > 0 \quad \forall a > 0$$

(Si $g(a) = 0 \Rightarrow a^\omega = 0 \Rightarrow \omega \ln a = 0 \Rightarrow \ln a = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow a = 0$)

Exemple : [Générateur croissant]

Générateur de YU (1985) [3]

L'application :

$$g_\lambda : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda x).$$

est un générateur croissant (où $\lambda > -1$ et $\lambda \neq 0$)

En effet : pour $\lambda > -1$ et $\lambda \neq 0$ on a :

i) $g_\lambda(0) = \frac{\ln(1)}{\lambda} = 0$.

ii) g_λ est continue sur $[0, 1]$ (comme composée de fonctions continues).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g_\lambda(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda x) = 0 = g_\lambda(0).$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} g_\lambda(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x \frac{\ln(1 + \lambda x)}{\lambda x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} \ln(1 + \lambda x) \\ &= \frac{\ln(1 + \lambda)}{\lambda} = g_\lambda(1) > 0 \end{aligned}$$

iii) g_λ est strictement croissante sur $[0, 1]$.

En effet : comme g est continue alors $g([0, 1]) = [g(0), g(1)] = \left[0, \frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda}\right]$, et nous avons :

$$\forall x \in [0, 1]; \quad g'_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\lambda} \frac{1}{1 + \lambda x} = \frac{1}{1 + \lambda x} > 0; \quad \forall \lambda > -1 \text{ et } x \in [0, 1]$$

$$\text{Car } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} < -1 \Rightarrow \lambda > -1 > -\frac{1}{x}.$$

Donc g est strictement croissante

Conclusion : g_λ est une bijection.

Définition 2.7 (Pseudo-inverse d'un générateur croissant) [3]

Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ un générateur croissant.

Nous définissons la pseudo-inverse de g , noté $g^{(-1)}$ comme étant une fonction de \mathbb{R} vers $[0, 1]$ telle que :

$$g^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in [0, g(1)] \\ 1 & \text{si } x \in [g(1), +\infty[\end{cases}$$

Avec g^{-1} est l'inverse de g

Définition 2.8 (Pseudo-inverse d'un générateur décroissant)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ un générateur décroissant.

Nous définissons la pseudo-inverse de f , noté $f^{(-1)}$ comme étant une fonction de \mathbb{R} vers $[0, 1]$ telle que :

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ f^{-1}(x) & \text{si } x \in [0, f(0)] \\ 0 & \text{si } x \in [f(0), +\infty[\end{cases}$$

Avec f^{-1} est l'inverse de f

Remarque : La fonction pseudo-inverse est bien définie puisque $g : [0, 1] \rightarrow [0, g(1)]$ est une fonction bijective car elle est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$ vers $g([0, 1]) = [0, g(1)]$.
(avec $g(0) = 0$) (de même pour le générateur décroissant f)

Théorème 2.5 (1^{ère} caractérisation du théorème de compléments flous) [3]

Soit c une fonction de $[0, 1] \mapsto [0, 1]$. Alors c est un complément flou involutif si et seulement si il existe une fonction g continue de $[0, 1]$ vers \mathbb{R} telle que :

- i) $g(0) = 0$.
- ii) g est strictement croissante.
- iii) $c(a) = g^{-1}[g(1) - g(a)], \quad \forall a \in [0, 1]$.

Preuve :

Soit c un complément flou involutif. Alors c satisfait les axiomes c_1 et c_4 .

Existence : d'après le théorème 2.4 : c admet un unique point fixe soit $e_c : c(e_c) = e_c$ avec $e_c \in]0, 1]$.

Pour $b > 0$, un réel positif fixé dans \mathbb{R}^+

Posons : $h(x) = \frac{b}{e_c}x$ ($e_c \neq 0$ car $c(0) = 1 \neq 0$) pour $x \in [0, e_c]$.

h est bien définie sur $[0, e_c]$ et on a $\forall x \in [0, e_c], 0 \leq h(x) \leq b$.

Donc h est bien définie et satisfait :

- h est continue sur $[0, e_c]$, car h est affine.
- $h(0) = 0, h(e_c) = b$.
- h est strictement croissante, car $h'(x) = b/e_c > 0$.
- h est bijective.

A partir de h nous allons définir une fonction g sur $[0, 1]$ telle que :

$$g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in [0, e_c] \\ 2b - h(c(x)) & \text{si } x \in]e_c, 1] \end{cases}$$

$$g(1) = 2b - h(c(1)) = 2b - h(0) = 2b.$$

nous avons donc, $g(0) = h(0) = 0$

- i) • g est strictement croissante sur $]e_c, 1]$.

En effet, du fait que c est strictement décroissante (car c vérifie l'axiome squelettique c_2), et comme h est strictement croissante, alors $h \circ c$ est strictement décroissante, et donc $-h \circ c$ est strictement croissante.

- g est strictement croissante sur $[0, e_c]$ car elle est identique à h .

Par suite g est strictement croissante sur $[0, 1]$.

- ii) g est continue sur $[0, 1]$.

En effet, $g(e_c) = h(e_c) = b$, et

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow e_c^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow e_c^-} [2b - h(c(x))] \\
&= 2b - \lim_{x \rightarrow e_c^-} h(c(x)) \\
&= 2b - h \left[\lim_{x \rightarrow e_c^-} c(x) \right] \quad (\text{car } h \text{ est continue sur } [0, e_c]). \\
&= 2b - h[c(e_c)] \quad (\text{car } e_c \text{ est continue}). \\
&= 2b - h(e_c) \quad (\text{car } e_c \text{ est le point fixe de } c). \\
&= 2b - b = b = g(e_c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} [2b - h(c(x))] \\
&= 2b - \lim_{x \rightarrow 1} h(c(x)) \\
&= 2b - h \left[\lim_{x \rightarrow 1} c(x) \right] \\
&= 2b - h(0) = 2b = g(1)
\end{aligned}$$

D'après i) et ii) et $\Rightarrow g$ est une bijection sur $[0, 1]$ vers $[0, 2b]$.

Le pseudo-inverse $g^{(-1)}$ de g , vérifie la formule :

$$g^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in]-\infty, 0] \quad (1) \\ h^{-1}(x) & \forall x \in]0, b] \quad (2) \\ c(h^{-1}(2b - x)) & \forall x \in]b, 2b] \quad (3) \\ 1 & \forall x \in]2b, +\infty[\quad (4) \end{cases}$$

En effet

• $h^{-1} : [0, b] \rightarrow [0, e_c] \Rightarrow g^{(-1)}$ est bien définie sur $]0, b]$ et $g^{(-1)}$ est exactement h^{-1} sur $]0, b]$.

• Nous avons : $\forall x \in [0, 2b], g^{-1}(x) \in [0, 1]$, donc $0 \leq g^{-1}(x)$ (α)

De même,

$$g^{-1}(0) = g^{-1}(g(0)) = 0 \quad (\text{car } g(0) = 0)$$

donc pour $x \leq 0$; $g^{(-1)}(x) \leq g^{(-1)}(0) = 0$ (β). D'après (α) et (β), $g^{(-1)}(0) = 0$: (1) est vérifiée

D'autre part, $g(x) = 2b - h(c(x))$, $\forall x \in]e_c, 1]$.

On pose $g(x) = y \in]b, 2b]$

$$\Rightarrow y = 2b - h(c(x))$$

$$\Rightarrow h(c(x)) = 2b - y. \in [0, b] \quad (\text{par définition de } h)$$

$$\Rightarrow c(x) = h^{-1}(2b - y), \quad \forall y \in]b, 2b].$$

$$\Rightarrow c(c(x)) = c(h^{-1}(2b - y)) \quad \text{avec } h^{-1}(2b - y) \in [0, e_c] \subset [0, 1]$$

$$\Rightarrow x = c(h^{-1}(2b - y)), \quad \text{car } c \text{ est involutif.}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(y) = c(h^{-1}(2b - y)) \quad \forall y \in [b, 2b]$$

D'où (3) est vérifiée.

• Comme g est continue sur $[0, 1]$. Donc

$$\begin{aligned}
g(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2b - h \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} c(x) \right) \\
&= 2b - h(c(1)) = 2b - h(0) = 2b.
\end{aligned}$$

Et par définition du pseudo-inverse de g :

$$g^{(-1)}(x) = 1, \text{ si } x \in]g(1), +\infty[\Rightarrow (4) \text{ est vérifiée .}$$

Montrons maintenant que g satisfait : $c(a) = g^{-1} [g(1) - g(a)]$, $\forall a \in [0, 1]$.

Si $a \in [0, e_c]$, donc $h(a) \in]0, b]$, par suite :

$$\begin{aligned} g^{-1} [g(1) - g(a)] &= g^{-1} [g(1) - h(a)] \\ &= g^{-1} [2b - h(a)] \\ &= c [h^{-1}(2b - (2b - h(a)))] \quad (\text{car } 2b - h(a) \in]b, 2b]) \\ &= c [h^{-1}(h(a))] = c(a), \forall a \in [0, e_c] \quad (h \text{ est bijective}). \end{aligned}$$

Maintenant si $a \in]e_c, 1]$, donc $c(a) \in [0, e_c]$. Alors :

$$\begin{aligned} g^{-1} [g(1) - g(a)] &= g^{-1} [2b - (2b - h(c(a)))] \quad (\text{car } a \in]e_c, 1]) \\ &= g^{-1} [h(c(a))] \\ &= h^{-1} [h(c(a))] \quad (\text{car } h(c(a)) \in]0, b] \text{ avec } h(e_c) = b) \\ &= c(a), \forall a \in]e_c, 1] \quad (h \text{ est bijective}). \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall a \in [0, 1]; \quad c(a) = g^{-1} [g(1) - g(a)]$$

Réciproquement soit g une fonction continue sur $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telle que :

- $g(0) = 0$.
- g est strictement croissante.

Par définition de la pseudo-inverse de g , notée $g^{(-1)}$, elle est une fonction définie par :

$$g^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0 & x \in]-\infty, 0[\\ g^{-1}(x) & x \in [0, g(1)] \\ 1 & x \in]g(1), +\infty[\end{cases}$$

Et soit c une fonction définie sur $[0, 1]$ vérifiant :

$$c(a) = g^{-1} [g(1) - g(a)], \quad \forall a \in [0, 1].$$

Nous voulons montrer que :

c est un complément involutif.

- Pour cela, montrons que c satisfait les axiomes c_2 et c_4 :

- Soient $a, b \in [0, 1]$ tels que $a < b$.

$$\begin{aligned} g(a) &< g(b) \\ \Rightarrow g(1) - g(a) &> g(1) - g(b) \\ \Rightarrow g^{-1} [g(1) - g(a)] &> g^{-1} [g(1) - g(b)] \quad (\star) \end{aligned}$$

Car : g est continue sur $[0, g(1)]$. D'où g^{-1} est aussi continue.

(nous avons : $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < g(a) < g(1)$ ($g(0) = 0$).

$$\Rightarrow -g(a) > -g(1) \Rightarrow g(1) > g(1) - g(a) > 0$$

D'où $g(1) - g(a) \in [0, g(1)]$.

$$(\star) \Rightarrow c(a) > c(b)$$

Donc c vérifie axiome c_2 (décroissance).

- Soit $a \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} c(c(a)) &= g^{-1}[g(1) - g(c(a))] \\ &= g^{-1}[g(1) - g[g^{-1}(g(1) - g(a))]] \\ &= g^{-1}[g(1) - (g(1) - g(a))] \\ &= g^{-1}[g(a)] = a. \quad (g(a) \in [0, g(1)]) \end{aligned}$$

D'où c vérifie l'axiome c_4 (involution).

Donc d'après le théorème 2.1, c vérifie les axiomes c_1 et c_3 et par suite c est un complément flou.

□

Exemple : Classe Sigma des compléments flous : $g_\lambda(a) = \frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda a)$.

Corollaire 2.1 (2^{ème} caractérisation du théorème de compléments flous)

Soit c une fonction de $[0, 1] \mapsto [0, 1]$. Alors c est un complément flou si et seulement s'il existe une fonction continue f de $[0, 1]$ vers \mathbb{R} telle que :

- i) f est strictement décroissante sur $[0, 1]$.
- ii) $f(1) = 0$.
- iii) $c(a) = f^{-1}[f(0) - f(a)], \quad \forall a \in [0, 1]$.

Preuve : En appliquant le théorème 2.5, la fonction c est un complément flou si et seulement s'il existe un générateur croissant g tel que

$$c(a) = g^{-1}[g(1) - g(a)] \text{ et } g(0) = 0 \tag{2.5}$$

Posons $f(a) = g(1) - g(a) \quad \forall a \in [0, 1]$. Alors $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(0) = g(1) \end{cases}$

Or, g est strictement croissante $\implies f$ est strictement décroissante.

Par suite, f est bijective. Posons maintenant :

$$\begin{aligned} f^{-1}(a) &= g^{-1}[g(1) - a] \quad \text{pour } a \in [0, f(0)] \\ &= g^{-1}[f(0) - a] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(a)) &= g(1) - g(f^{-1}(a)) \\ &= g(1) - g[g^{-1}(f(0) - a)] \\ &= g(1) - g[g^{-1}(g(1) - a)] \\ &= g(1) - [g(1) - a] = a \end{aligned}$$

D'autre part, comme $f^{-1}(a) = g^{-1}[g(a) - a] = g^{-1}[f(0) - a]; f(a) = g(1) - g(a)$. Alors :

$$\begin{aligned} f^{-1}[f(a)] &= g^{-1}[g(1) - f(a)] \\ &= g^{-1}[g(1) - g(1) + g(a)]. \\ &= g^{-1}[g(a)] = a \end{aligned}$$

Aussi :

$$\begin{aligned}
 c(a) &= g^{-1}[g(1) - g(a)] \\
 &= f^{-1}[g(a)] \\
 &= f^{-1}[g(1) - g(1) + g(a)] \\
 &= f^{-1}[\underbrace{g(a) - g(1)}_{-f(a)}] + g(1) \\
 &= f^{-1}[-f(a) + g(1)] \\
 &= f^{-1}[-f(a) + f(0)] \\
 &= f^{-1}[f(0) - f(a)]
 \end{aligned}$$

D'où : $\exists f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

1. f est strictement décroissante (car g est strictement croissante).
2. $\forall a \in [0, 1], g(a) = f(0) - f(a)$.

En remplaçant dans (2.5) :

$$\begin{aligned}
 c(a) &= g^{-1}[g(1) - g(a)] \\
 &= f^{-1}[f(0) - f(a)]
 \end{aligned}$$

Nous obtenons c est un complément flou involutif par application du théorème 2.5.

Exemple : Soit f_k l'application définie par :

$$\begin{aligned}
 f_k &: [0, 1] \mapsto \mathbb{R} \\
 a &\mapsto f_k(a) = -ka + k, \quad \forall k > 0
 \end{aligned}$$

$$\forall k > 0 \quad f_k(0) = k, \quad \text{et} \quad f_k(1) = 0.$$

f_k est strictement décroissante car $f'_k(a) = -k < 0, \quad \forall k > 0$.

f_k est continue (fonction affine).

$$f_k(x) = y \Rightarrow -ka + k = y \Rightarrow -k(a - 1) = y \Rightarrow a - 1 = -\frac{1}{k}y \Rightarrow a = -\frac{1}{k}y + 1$$

$$\Rightarrow f_k^{-1}(y) = -\frac{1}{k}y + 1$$

$$f_k^{-1}(f_k(0) - f_k(a)) = f_k^{-1}[k + ka - k] = f_k^{-1}(ka) = -\frac{1}{k}(ka) + 1 = -a + 1.$$

$c(a) = -a + 1 \implies$ 1) c est strictement décroissante $\forall a \in [0, 1]$.

$$c(c(a)) = -c(a) + 1 = -(-a + 1) + 1 = a - 1 + 1 = a.$$

$\left. \begin{array}{l} 2) \ c \text{ est involutive} \\ 3) \ c(0) = 1 \\ 4) \ c \text{ est continue} \end{array} \right\}$ alors c est un complément flou.

2.3 Intersection et réunion floues

2.3.1 Intersection floue : t-norme

Soit X un ensemble classique. L'intersection de deux ensembles flous A et B est spécifiée, en générale par une opération binaire sur $[0, 1] \times [0, 1]$ notée par une fonction i définie par :

$$i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$\forall x \in X (\mu_A(x), \mu_B(x)) \in [0, 1] \times [0, 1]$ telle que :

$$\mu_{A \cap B}(x) = i[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

On voit bien que la fonction i est indépendante de x , et ne dépend que d'un couple (a, b) tel que $a \in [0, 1]$ et $b \in [0, 1]$.

Pour que la fonction i de cette forme soit qualifiée d'intersection floue, elle doit posséder des propriétés appropriées, qui garantissent que les ensembles flous produits par i sont intuitivement acceptables en tant qu'intersections floues significatives de toute paire donnée de sous ensembles flous.

De telles fonctions i s'appellent des **t-normes**, et elles satisfont certains axiomes et propriétés.

La classe des fonctions t-normes est généralement équivalente à la classe d'intersection floue. L'étude des fonctions i (t-normes) est équivalente à l'étude de l'intersection floue, puisqu'elles vont les générer.

Définition et propriétés 2.1 (Axiomes pour t-normes) [3] Soient a , b et $d \in [0, 1]$:

- Axiome i_1 : $i(a, 1) = a$ (conditions aux limites)
- Axiome i_2 : si $b \leq d \Rightarrow i(a, b) \leq i(a, d)$ (monotonie ou croissance)
- Axiome i_3 : $i(a, b) = i(b, a)$ (commutativité)
- Axiome i_4 : $i(a, i(b, d)) = i(i(a, b), d)$ (associativité)

A partir de ces axiomes, nous pouvons déduire quelques résultats importants, en les combinant entre eux. tels que :

- $i(0, 1) = 0$ et $i(1, 1) = 1$ (conditions aux limites).
- $i(0, 1) = i(1, 0) = 0$ (commutativité + conditions aux limites).
- $i(0, 0) = 0$ ($0 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq i(0, 0) \leq i(0, 1) = 0$)

La t-norme i est symétrique \Rightarrow l'intersection floue est symétrique pour la commutativité axiome i_3 .

Il existe d'autres axiomes pour les *t-normes*, et qui donne une importance pour les études qui accompagneront les intersections floues :

- Axiome i_5 : i est une fonction continue
- Axiome i_6 : $i(a, a) < a$ (sous-empotence)
- Axiome i_7 : si $a_1 < a_2$ et $b_1 < b_2$ alors $i(a_1, b_1) < i(a_2, b_2)$
(stricte monotonie / croissance). ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in [0, 1]$)

Axiome i_6 montre que l'intersection floue n'excède généralement par a .

Les *t-normes* qui vérifient, de plus les axiomes i_5 et i_6 sont appelés *t-normes d'Archimède* [3], si de plus elles vérifient l'axiome i_7 , elles sont dites *t-normes d'Archimède strictes*

Nous pouvons tirer d'autres extensions de l'intersection floue :

Théorème 2.6 [3] *L'intersection floue standard est la seule t-norme idempotente*

Preuve : On a , $\min\{a, a\} = a, \forall a \in [0, 1]$.

Supposons qu'il existe une t-norme i telle que : $i(a, a) = a, \forall a \in [0, 1]$
 Pour $a, b \in [0, 1]$, on cherche à montrer que $i(a, b) = \min(a, b)$, en effet :

- Si $a \leq b$ alors :

$$i(a, a) = a \leq i(a, b) \leq i(a, 1) = a$$

(par la monotonie de i et $b \leq 1$ plus les conditions aux limites)

Donc $i(a, b) = a = \min\{a, b\}$.

- De même si $a \geq b$ alors :

$$i(b, b) = b \leq i(a, b) \leq i(1, b) = b.$$

Par conséquent $i(a, b) = b = \min(a, b)$

Donc

$$i(a, b) = \min(a, b) \quad , \quad \forall a, b \in [0, 1]$$

□

Exemple : [3] Pour $a, b \in [0, 1]$

↔ Intersection standard : $i(a, b) = \min(a, b)$, alors i est une t-norme.

↔ Produit Algébrique : $i(a, b) = ab$, alors i est une t-norme.

↔ Différence bornée : $i(a, b) = \max(0, a + b - 1)$, alors i est une t-norme.

↔ Intersection drastique : $i_{\min}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } b = 1 \\ b & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (i(a, 1) = a ; i(1, b) = b)$

Théorème 2.7 [3] *Pour tout $a, b \in [0, 1]$ on a :*

$$i_{\min}(a, b) \leq i(a, b) \leq \min\{a, b\}.$$

où i_{\min} est l'intersection drastique définie ci-dessus.

Preuve :

Nous avons : $i(a, b) \leq i(a, 1) = a$ (conditions aux limites + monotonie)

De même, $i(a, b) = i(b, a) \leq i(b, 1) = b$.

Alors : $i(a, b) \leq a$ et $i(a, b) \leq b \Rightarrow i(a, b) \leq \min(a, b)$.

De même,

$i_{\min}(a, b) = 0 \leq i(a, b) \quad \forall a, b \in [0, 1[$

et $i_{\min}(a, b) = a = i(a, b)$ si $b = 1$. D'où $i_{\min}(a, b) \leq i(a, b)$.

Donc, l'intersection drastique $i_{\min}(a, b)$ est la borne inférieure de $i(a, b)$, $\forall a, b \in [0, 1]$.

□

Une caractérisation de l'intersection floue *t-norme* vient de fait :

Proposition 2.4 Soit f un générateur décroissant sur $[0, 1]$. Alors la fonction g définie par :

$$g(a) = f(0) - f(a), \quad \forall a \in [0, 1]$$

est un générateur croissant avec :

$$g(1) = f(0) \quad \text{et} \quad g^{(-1)}(b) = f^{(-1)}(f(0) - b), \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

Preuve : Puisque f est un générateur décroissant, comme $f(1) = 0$, alors f est continue et par suite g est forcément continue.

Et soit $a, b \in [0, 1]$ tel que $a < b$, comme f est strictement décroissante, alors

$$f(a) > f(b) \quad \text{et} \quad g(a) = f(0) - f(a) < f(0) - f(b) = g(b).$$

Donc g est strictement croissante et nous avons :

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) - f(0) = 0 \\ g(1) &= f(0) - f(1) = f(0) \end{aligned}$$

Alors comme

- i. g est continue
- ii. g est strictement croissante
- iii. $g(0) = 0$

Donc g est un générateur croissant, et par suite le pseudo inverse de g est défini par :

$$g^{(-1)}(a) = \begin{cases} 0 & a \in]-\infty, 0[\\ g^{-1}(a) & a \in [0, g(1)] \\ 1 & a \in]g(1), +\infty[\end{cases}$$

Soit $b = g(a) = f(0) - f(a)$ avec $b \in [0, g(1)] = [0, f(0)]$

Alors $f(a) = f(0) - b$ et $a = f^{-1}[f(0) - b]$ (car $f(0) - b \in [0, f(0)]$)

D'où $\forall b \in [0, g(1)] = [0, f(0)]$; $g^{-1}(b) = f^{-1}[f(0) - b]$

Comme le pseudo-inverse de f vérifie :

$$f^{(-1)}(b) = \begin{cases} 1 & b \in]-\infty, 0[\\ f^{-1}(b) & b \in [0, f(0)] \\ 0 & b \in]f(0), +\infty[\end{cases}$$

Alors $g^{(-1)}(b) = f^{(-1)}[f(0) - b]$, $\forall b \in \mathbb{R}$. (avec $f(0) = g(1)$)

□

Proposition 2.5 Soit g un générateur croissant sur $[0, 1]$, la fonction f définie par :

$$f(a) = g(1) - g(a) \quad , \quad \forall a \in [0, 1]$$

est un générateur décroissant avec $f(0) = g(1)$ et le pseudo-inverse $f^{(-1)}$ de f est donné par :

$$f^{(-1)}(a) = g^{(-1)}[g(1) - a]$$

Preuve : Analogue à celle de la Proposition 2.4 (ou change le rôle de g avec f et le sens de monotonie)

□

Théorème 2.8 (caractérisation de la t -norme) [3] [4] [6] [7] [16]

Soit i un opérateur binaire sur $[0, 1] \times [0, 1]$. S'il existe un générateur décroissant f

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

vérifiant : $f(1) = 0$ tel que

$$i(a, b) = f^{(-1)}[f(a) + f(b)]. \quad \forall a, b \in [0, 1] \quad (2.6)$$

Alors i est une t -norme Archimédienne.

Preuve : Soit $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^+$ un générateur décroissant qui vérifie, pour rappel, selon la Définition 2.6.

- f est continue sur $[0, 1]$.
- $f(1) = 0$.
- f est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

Pour $a, b \in [0, 1]$, on a $f(a) \geq 0$ et $f(b) \geq 0$ et donc $f(a) + f(b) \geq 0$.

$$\Rightarrow f(a) + f(b) \in \mathbb{R}^+.$$

donc le pseudo-inverse de f est bien défini sur \mathbb{R}^+ .

tel que :

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & x \in [0, f(0)] \\ 0 & x \in]f(0), +\infty[\end{cases}$$

avec f^{-1} est l'inverse de f .

a) Montrons tout d'abord que i est une t -norme.

$$\forall a, b \in [0, 1] \quad i(a, b) = f^{(-1)}[f(a) + f(b)].$$

$a_1)$

$$\begin{aligned} i(a, 1) &= f^{(-1)}[f(a) + f(1)] \\ &= f^{(-1)}[f(a) + 0]. \\ &= f^{(-1)}(f(a)). \end{aligned}$$

$$0 \leq a \leq 1 \Rightarrow f(1) \leq f(a) \leq f(0) \Rightarrow 0 \leq f(a) \leq f(0) \Rightarrow f(a) \in [0, f(0)]$$

$$\text{donc } f^{(-1)}(f(a)) = f^{-1}(f(a)) = a.$$

$$\text{et par suite } \underbrace{i(a, 1)}_{\text{Axiome } c_1} = a. \quad \forall a \in [0, 1].$$

$a_2)$ Soient a, b et d dans $[0, 1]$ tels que $b \leq d$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } i(a, b) &= f^{(-1)}[f(a) + f(b)]. \\ b \leq d &\Rightarrow f(b) \geq f(d) \\ &\Rightarrow f(a) + f(b) \geq f(a) + f(d) \geq 0 \quad (f(a) \geq 0) \end{aligned}$$

- si $f(a) + f(b) \leq f(0) \Rightarrow f(a) + f(d) \leq f(0)$
 et donc $f^{-1}(f(a) + f(b)) \leq f^{-1}(f(a) + f(d))$
 (car f et f^{-1} ont la même monotonie).

et par suite $f^{(-1)}(f(a) + f(b)) \leq f^{(-1)}(f(a) + f(d))$. i.e $i(a, b) \leq i(a, d)$
D'où i est monotone (axiome i_2).

- si $f(a) + f(b) > f(0)$ et $f(a) + f(d) \leq f(0)$

alors : $f^{(-1)}(f(a) + f(b)) = 0$ et $f^{(-1)}(f(a) + f(d)) = f^{-1}(f(a) + f(d)) \geq 0$.

D'où $0 = f^{(-1)}(f(a) + f(b)) \leq f^{(-1)}(f(a) + f(d))$. D'où (axiome i_2).

- Si $f(a) + f(b) > f(0)$ et $f(a) + f(d) > f(0)$.

donc $f^{(-1)}(f(a) + f(b)) = 0 \leq f^{(-1)}(f(a) + f(d)) = 0$.

a_3) Soient $a, b, \in [0, 1]$.

on a : $i(a, b) = f^{(-1)}[f(a) + f(b)] = f^{(-1)}[f(b) + f(a)] = i(b, a)$

donc i est commutative \Rightarrow (axiome i_3).

a_4) Soient $a, b, \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} i(a, i(b, c)) &= i\left(a, f^{(-1)}(f(b) + f(c))\right) \\ &= f^{(-1)}\left[f(a) + f\left(f^{(-1)}(f(b) + f(c))\right)\right] \\ \Rightarrow i(a, i(b, c)) &= f^{(-1)}[f(a) + (f(b) + f(c))] \\ &= f^{(-1)}[(f(a) + f(b)) + f(c)] \\ \text{On a :} & \\ &= f^{(-1)}\left[\underbrace{f(f^{(-1)}(f(a) + f(b)))}_{i(a, b)} + f(c)\right] \\ &= f^{(-1)}[f(i(a, b)) + f(c)] \\ &= i(i(a, b), c) \end{aligned}$$

donc i est associative \Rightarrow (axiome i_4).

conclusion : i est une t -norme sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

b) Montrons que i est Archimédienne.

Pour cela, il suffit de montrer que :

★ i est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

★ et $i(a, a) < a, \quad \forall a \in]0, 1[$.

a_5) On a $\forall a, b \in [0, 1] \quad i(a, b) = f^{(-1)}[f(a) + f(b)]$

On a : $f^{(-1)} \equiv f^{-1}$ sur $[0, f(0)]$.

Comme f est continue sur $[0, 1]$, alors f^{-1} est continue sur \mathbb{R}^+ et par suite i est continue $[0, 1] \times [0, 1]$.

Ainsi $f^{(-1)} \equiv 0$ sur $]f(0), +\infty[$.

et donc $i \equiv 0$ est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

et par suite i est continue sur $[0, 1] \times [0, 1] \Rightarrow$ (axiome i_5).

a_6) Soit $a \in]0, 1[$, alors $f(a) > 0$ (car si $f(a) = 0 = f(1) \Rightarrow a = 1$) (f est injective).

$i(a, a) = f^{(-1)}(f(a) + f(a)) = f^{(-1)}[2f(a)]$.

On a

$f(a) < f(a) + f(a) = 2f(a)$

$\Rightarrow f^{-1}(f(a)) \geq f^{-1}(2f(a))$

$\Rightarrow a > i(a, a) \quad \forall a \in]0, 1[$.

D'où i vérifie (axiome i_6).

Conclusion 2 : i est une t -norme Archimédienne.

Ce qui clôture la démonstration du théorème.

□

L'usage de tels opérateurs a plusieurs domaines d'applications, par exemple :

Etant donné un générateur décroissant f , on peut construire une t-norme i par le théorème de la caractérisation selon la formule (2.9).

Nous considérons la classe des générateurs décroissants f_p de paramètre p définie par :

$$f_p(a) = 1 - a^p \quad (p > 0, a \in [0, 1])$$

(Nous pouvons facilement vérifier que f_p est un générateur décroissant)

Alors le pseudo-inverse de f_p est donné par :

$$f_p^{(-1)}(z) = \begin{cases} 1 & , z \in]-\infty; 0[\\ (1 - z)^{\frac{1}{p}} & , z \in [0, 1] \\ 0 & , z \in]1, +\infty[\end{cases} .$$

En appliquant la formule, (2.9), nous obtenons pour la t-norme

$$\begin{aligned} i_p(a, b) &= f_p^{(-1)}[f_p(a) + f_p(b)] \cdot a, b \in [0, 1] \\ &= f_p^{-1}(2 - a^p - b^p) \quad (2 - (a^p + b^p) \geq 0) \\ &= \begin{cases} (1 - (2 - a^p - b^p))^{\frac{1}{p}} & \text{si } 2 - (a^p + b^p) \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (a^p + b^p - 1)^{\frac{1}{p}} & \text{si } a^p + b^p \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \max \{0, (a^p + b^p - 1)^{\frac{1}{p}}\} \quad \forall a, b \in [0, 1] \text{ et } p > 0 \end{aligned}$$

L'un des exemples les plus célèbres de ceci est de Yager (1980). Soit la classe des générateurs décroissants suivants :

$$f_w(a) = (1 - a)^w, \quad (w > 0).$$

$$\text{On obtient : } f_w^{(-1)}(z) = \begin{cases} 1 - z^{\frac{1}{w}} & \text{si } z \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } z \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

et nous obtenons, en appliquant la caractérisation de t-norme (formule (2.9))

$$\begin{aligned} i_w(a, b) &= f_w^{(-1)}[f_w(a) + f_w(b)] \cdot a, b \in [0, 1] \\ &= f_w^{-1}[(1 - a)^w + (1 - b)^w] \\ &= \begin{cases} 1 - [(1 - a)^w + (1 - b)^w]^{\frac{1}{w}} & \text{si } (1 - a)^w + (1 - b)^w \in [0, 1] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \\ &= 1 - \min \left\{ 1, [(1 - a)^w + (1 - b)^w]^{\frac{1}{w}} \right\} \end{aligned}$$

Le dernier exemple (application) : les classes de Yager nous renvoie vers le théorème 2.7 qui encadre l'intersection floue entre l'intersection drastique (i_{min}) et l'intersection classique (standard) $\min\{a, b\} = \mu_{A \cap B}(x)$

$$i_w(a, b) = 1 - \min\{1, (1 - a)^w + (1 - b)^w\}^{\frac{1}{w}} \quad (w > 0)$$

Ceci nous ramène à prononcer le théorème suivant :

Théorème 2.9 [3] *Soit i_w la classe de t-norme de Yager (définie précédemment) Alors :*

$$i_{min}(a, b) \leq i_w(a, b) \leq \min(a, b) \quad , \quad \forall a, b \in [0, 1] \quad (2.7)$$

où $i_w(a, b) = 1 - \min\{1, [(1 - a)^w + (1 - b)^w]^{\frac{1}{w}}\}$

Preuve :

i. **borne inférieure :**

puisque $i_w(1, b) = b$ et $i_w(1, a) = a$
qui sont indépendants de w

Alors

$$\lim_{w \rightarrow 0} [(1 - a)^w + (1 - b)^w]^{\frac{1}{w}} = +\infty$$

et donc

$$\lim_{w \rightarrow 0} i_w(a, b) = 0, \quad \forall a, b \in [0, 1]$$

ii. **borne supérieure :**

D'après le théorème 2.7 on a

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \min[1, ((1 - a)^w + (1 - b)^w)^{\frac{1}{w}}] = \max(1 - a, 1 - b)$$

$$\Rightarrow i_{\infty}(a, b) = 1 - \max(1 - a, 1 - b) = \min\{a, b\}$$

□

Exemple : [Opérations liés à la classe de Yager] [3]

★ Por $w = 1$ (robuste) :

	$b = 0$	$b = 0,25$	$b = 0,5$	$b = 0,75$	$b = 1$
$a = 1$	0	0,25	0,5	0,75	1
$a = 0,75$	0	0	0,25	0,5	0,75
$a = 0,5$	0	0	0	0,25	0,5
$a = 0,25$	0	0	0	0	0,25
$a = 0$	0	0	0	0	0

★ Por $w = 2$:

	$b = 0$	$b = 0,25$	$b = 0,5$	$b = 0,75$	$b = 1$
$a = 1$	0	0,25	0,5	0,75	1
$a = 0,75$	0	0,21	0,44	0,65	0,75
$a = 0,5$	0	0,1	0,29	0,44	0,5
$a = 0,25$	0	0	0,1	0,21	0,25
$a = 0$	0	0	0	0	0

★ Por $w \rightarrow \infty$ (fluide) :

	$b = 0$	$b = 0,25$	$b = 0,5$	$b = 0,75$	$b = 1$
$a = 1$	0	0,25	0,5	0,75	1
$a = 0,75$	0	0,25	0,5	0,75	0,75
$a = 0,5$	0	0,25	0,5	0,5	0,5
$a = 0,25$	0	0,25	0,25	0,25	0,25
$a = 0$	0	0	0	0	0

Référence	Formule $i(a, b)$ [3]	Générateur décroissant $f(a)$	Plage du paramètre	Quand le paramètre converge vers 0	Quand le paramètre converge vers 1 ou -1	Quand le paramètre converge vers $+\infty$ ou $-\infty$
Dounbi [1982]	$\left\{ 1 + \left[\left(\frac{1}{a} - 1 \right)^\lambda + \left(\frac{1}{b} - 1 \right)^\lambda \right]^{\frac{1}{\lambda}} \right\}^{-1}$	$\left(\frac{1}{a} - 1 \right)^\lambda$	$\lambda > 0$	$i_{\min}(a, b)$	$\frac{ab}{a+b-ab}$ quand $\lambda = 1$	$\min(a, b)$
Frank [1979]	$\log_s \left[1 + \frac{(s^a-1)(s^b-1)}{s-1} \right]$	$-\ln \left(\frac{s^a-1}{s-1} \right)$	$s > 0, s \neq 1$	$\min(a, b)$	ab quand $s \rightarrow 1$	$\max(0, a + b - 1)$
Hamacher [1978]	$\frac{ab}{r+(1-r)(a+b-ab)}$	$-\ln \left(\frac{a}{r+(1-r)a} \right)$	$r > 0$	$\frac{ab}{a+b-ab}$	ab quand $r = 1$	$i_{\min}(a, b)$
Schweizer & Sklar 1 [1963]	$\{\max(0, a^p + b^p - 1)\}^{\frac{1}{p}}$	$1 - a^p$	$p \neq 0$	ab	$\max(0, a + b - 1)$, quand $p = 1$; $\frac{ab}{a+b-ab}$, quand $p = -1$.	$i_{\min}(a, b)$ quand $p \rightarrow \infty$ $\min(a, b)$ quand $p \rightarrow -\infty$
Schweizer & Sklar 2	$1 - \frac{(1-a)^p + (1-b)^p}{(1-a)^p(1-b)^p}$	$\ln[1 - (1-a)^p]^{\frac{1}{p}}$	$p > 0$	$i_{\min}(a, b)$	ab quand $p = 1$	$\min(a, b)$
Schweizer & Sklar 3	$\exp \left(-(\ln a ^p + \ln b ^p)^{\frac{1}{p}} \right)$	$ \ln a ^p$	$p > 0$	$i_{\min}(a, b)$	ab quand $p = 1$	$\min(a, b)$
Schweizer & Sklar 4	$\frac{ab}{[a^p + b^p - a^p b^p]^{\frac{1}{p}}}$	$a^{-p} - 1$	$p > 0$	ab	$\frac{ab}{a+b-ab}$, quand $p = 1$	$\min(a, b)$
Yager [1980]	$1 - \min \left\{ 1, [(1-a)^\omega + (1-b)^\omega]^{\frac{1}{\omega}} \right\}$	$(1-a)^\omega$	$\omega > 0$	$i_{\min}(a, b)$	$\max(0, a + b - 1)$ quand $\omega = 1$	$\min(a, b)$
Dubois & Prade [1980]	$\frac{ab}{\max(a, b, \alpha)}$		$\alpha \in [0, 1]$	$\min(a, b)$	ab quand $\alpha = 1$	
Weber [1983]	$\max \left(0, \frac{a+b+\lambda ab-1}{1+\lambda} \right)$	$\frac{1}{\lambda} \ln[1+\lambda(1-a)]$	$\lambda > -1$	$\max(0, a+b-1)$	$i_{\min}(a, b)$ us $\lambda \rightarrow -1$; $\max[0, (a+b+ab-1)/2]$ quand $\lambda = 1$.	ab
Yu [1985]	$\max[0, (1+\lambda)(a+b-1) - \lambda ab]$	$\frac{1}{\lambda} \ln \frac{1+\lambda}{1+\lambda a}$	$\lambda > -1$	$\max(0, a+b-1)$	ab quand $\lambda \rightarrow -1$ $\max[0, 2(a+b-ab/2-1)]$ quand $\lambda = 1$	$i_{\min}(a, b)$

TABLE 2.1 – Tableau des classes des générateurs décroissants et celles des t-normes correspondantes [3].

2.3.2 L'union floue : t-conorme

Pour X un ensemble classique. Comme pour l'intersection, l'union floue de deux sous-ensembles flous A et B est spécifiée par la donnée d'une fonction binaire u ,

$$u : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

$$(\mu_A(x), \mu_B(x)) \longmapsto u[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A \cup B}(x)$$

où $A \cup B_{Flou} = \{(x, \mu_{A \cup B}(x)) / x \in X\}$

Pour que la fonction u de cette forme soit qualifiée d'union floue, elle doit posséder des propriétés appropriées, qui garantissent que les ensembles flous produits par i sont intuitivement acceptables en

tant qu'unions floues significatives de toute paire donnée de sous ensembles flous.

De telles fonctions s'appellent des **t-conormes**, et elles satisfont certains axiomes et propriétés.

La classe des fonctions t-conormes est généralement équivalente à la classe d'union floue. L'étude des fonctions i (t-conormes) est équivalente à l'étude de l'union floue, puisqu'elles vont les générer

Définition et propriétés 2.2 Une union floue ou une t-conorme [3] est une opération binaire sur l'intervalle $[0, 1] \times [0, 1]$ et elle satisfait au minimum les axiomes suivantes : $\forall a, b, c \in [0, 1]$

1. Axiome u_1 : $u(a, 0) = 0$ (conditions aux limites).
2. Axiome u_2 : si $b \leq c \Rightarrow u(a, b) \leq u(a, c)$ (monotonie.)
3. Axiome u_3 : $u(a, b) = u(b, a)$ (commutativité.)
4. Axiome u_4 : $u(a, u(b, c)) = u(u(a, b), c)$ (associativité.)
5. Axiome u_5 : u est continue.
6. Axiome u_6 : $u(a, a) > a$ (sous-empotence.)
7. Axiome u_7 : si $a_1 < a_2$ et $b_1 < b_2$ alors $u(a_1, b_1) < u(a_2, b_2)$ (stricte monotonie). ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in [0, 1]$)

Remarque :

1. En comparant les axiomes u_1 et u_4 avec i_1 et i_4 (t-norme) nous pouvons voir qu'ils ne se différencient que par les conditions aux limites.
2. Les axiomes u_1 à u_4 garantissent que l'union floue définie par $\mu_{A \cup B}(x) = u[\mu_A(x), \mu_B(x)]$ devient l'union classique.. lorsque les sous ensembles A et B sont classiques où :

$$u(0, 0) = 0, \quad u(0, 1) = u(1, 0) = u(1, 1) = 1$$

3. Les axiomes u_5, u_6 et u_7 sont analogues aux axiomes i_5, i_6 et i_7 de la t-norme..

Définition 2.9

- 1) Une t-conorme u qui vérifie les axiomes u_5 (continuité) et u_6 (super idempotence) est appelée t-conorme Archimédienne.
- 2) Toute t-conorme strictement monotone (vérifie u_7), est dite une t-conorme strictement Archimédienne.

Théorème 2.10 [3] L'union floue standard est la seule t-conorme idempotente

Exemple : $u(a, b) = a + b - ab \quad a, b, c \in [0, 1]$

i. u_1 : $u(a, 0) = a + 0 - a \times 0 = a$

ii. u_2 : Soit $b \leq c$

$$u(a, b) = a + b - ab$$

$$u(a, c) = a + c - ac$$

$$\Rightarrow u(a, b) - u(a, c) = b - ab - c + ac = (b - c)(1 - a)$$

comme $a \in [0, 1]$ et $b - c \leq 0$

$$\Rightarrow u(a, b) - u(a, c) \leq 0$$

iii. $u_3 : u(a, b) = a + b - ab = b + a - ba = u(b, a)$. Soit $d \in [0, 1]$

$$u(u(a, b), d) = u(a, b) + d - u(a, b) \times d = a + b - ab + d - d(a + b - ab) = u(a, u(b, d))$$

donc

$$\begin{aligned} [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ (a, b) &\mapsto u(a, b) = a + b - ab \end{aligned}$$

Vérifie bien les axiomes u_1 , u_2 et u_3 , donc la somme algébrique est bien une t-conorme

□

Exemple :

1) L'union standard $u(a, b) = \max(a, b)$

2) La norme algébrique : $u(a, b) = a + b - ab$.

3) La somme bornée : $u(a, b) = \min(1, a + b)$

4) L'union drastique $u(a, b) = u_{\max}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } b = 0 \\ b & \text{si } a = 0 \\ 1 & \text{ailleurs.} \end{cases}$

Comme pour les *t-normes*, les *t-normes* satisfont certaines propriétés et caractérisations :

$$\max(a, b) \leq a + b - ab \leq \min(1, a + b) \leq u_{\max}(a, b)$$

$$u_{\text{standard}}(a, b) \leq u_{\text{standard}}(c, b) \leq u_{\text{somme bornée}}(c, b) \leq u_{\text{min drastique}}(a, b)$$

La classe complète des unions floues est spécifiée donc le théorème qui suit.

Théorème 2.11 [3] Soient $a, b \in [0, 1]$.

On a :

$$\max(a, b) \leq u(a, b) \leq u_{\max}(a, b) \tag{2.8}$$

Preuve : Analogue au théorème 2.7 pour t-norme.

□

Contrairement au théorème de la caractérisation des t-normes Archimédiennes (pour les intersections floues) générées à partir des générateurs décroissants (voir théorème 2.12) le théorème suivant fournit une méthode pour générer des t-conormes d'Archimède ou de classes de t-conormes à partir des générateurs croissants.

Théorème 2.12 (caractérisation de la t-conorme) [3] [4] [6] [7] [16]

Soit u un opérateur binaire sur $[0, 1] \times [0, 1]$. S'il existe un générateur croissant g

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

vérifiant : $g(0) = 0$ tel que

$$u(a, b) = g^{(-1)}[g(a) + g(b)]. \quad \forall a, b \in [0, 1] \tag{2.9}$$

Alors u est une t-conorme Archimédienne

Preuve : Analogue à celle du Théorème 2.9

Exemple :

La classe de générateurs croissants définis par : $g_p(a) = 1 - (1 - a)^p$, $p \neq 0$ génère des t -conormes.
En effet :

- i) g_p est bien un générateur croissant.
- ii) Nous calculons le pseudo inverse du générateur g_p .

Par définition : Pour $p > 0$,

$$g_p^{(-1)}(z) = \begin{cases} 1 - (1 - z)^{\frac{1}{p}} = g_p^{-1}(z) & z \in [0, 1] \\ 1 & z \in]1, +\infty[\end{cases}$$

En appliquant la formule (2.8), nous allons avoir :

$$\begin{aligned} u_p(a, b) &= g_p^{(-1)} [g_p(a) + g_p(b)] \quad a, b \in [0, 1] \\ &= g_p^{(-1)} [(1 - (1 - a)^p) + (1 - (1 - b)^p)] \\ &= g_p^{(-1)} [2 - ((1 - a)^p + (1 - b)^p)] \\ &= \begin{cases} 1 - [(1 - (2 - ((1 - a)^p + (1 - b)^p)))]^{1/p} & \text{si } 2 - [(1 - a)^p + (1 - b)^p] \in [0, 1] \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - [(1 - a)^p - (1 - b)^p - 1]^{1/p} & \text{si } 2 - [(1 - a)^p + (1 - b)^p] \in [0, 1] \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= 1 - \max\{0, ((1 - a)^p + (1 - b)^p)^{1/p}\}. \end{aligned}$$

Remarque :

$$\begin{aligned} 2 - [(1 - a)^p + (1 - b)^p] \in [0, 1] &\Rightarrow 0 \leq 2 - [(1 - a)^p + (1 - b)^p] \leq 1 \\ &\Rightarrow -2 \leq -[(1 - a)^p + (1 - b)^p] \leq 1 - 2 = -1 \\ \Rightarrow 1 \leq [(1 - a)^p + (1 - b)^p] \leq 2 &\Rightarrow (1 - a)^p + (1 - b)^p \in [1, 2]. \quad p \neq 0. \end{aligned}$$

Exemple : Soit la classe des générateurs croissants suivants :

(t -conorme de Yager) $g_\omega(a) = a^\omega$, $\forall a \in [0, 1]$ et $\omega > 0$.

Nous obtenons le pseudo inverse de g_ω par :

$$g_\omega^{(-1)}(z) = \begin{cases} z^{1/\omega}; & z \in [0, 1] \quad (\omega > 0) \\ 1 & ; \quad z \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

Et la t -conorme correspondante (dite de Yager 1980) est :

$$\begin{aligned} u_\omega(a, b) &= g_\omega^{(-1)} [g_\omega(a) + g_\omega(b)] : \text{ par la formule (2.9)} \\ &= g_\omega^{(-1)} [a^\omega + b^\omega] = \begin{cases} (a^\omega + b^\omega)^{1/\omega} & a^\omega + b^\omega \in [0, 1] \\ 1 & \text{Ailleurs} \end{cases} \\ &= \min \left\{ 1, (a^\omega + b^\omega)^{1/\omega} \right\} \end{aligned}$$

Théorème 2.13 (La classe t -conorme de Yager) [3]

La t -conorme définie par : $u(a, b) = \min \left(1, (a^\omega + b^\omega)^{1/\omega} \right)$, $\omega > 0$ et $a, b \in [0, 1]$ vérifie :

$$\max(a, b) \leq u_\omega(a, b) \leq u_{\max}(a, b) \quad (2.10)$$

Preuve :

Pour $u_\omega(a, b) = \min \left\{ 1, (a^\omega + b^\omega)^{1/\omega} \right\} \quad \forall a, b \in [0, 1]$

En premier lieu, nous étudierons les cas suivants :

$$\triangleright a = 0, b \neq 0 \text{ alors : } \begin{cases} \max(a, b) = b \\ u_\omega(a, b) = \min(1, b) = b \\ u_{\max}(a, b) = b \end{cases}$$

et donc $b \leq b \leq b \implies (2.10)$ est vérifiée.

$$\triangleright a \neq 0, b = 0 \text{ alors } \begin{cases} \max(a, b) = a \\ u_\omega(a, b) = \min(1, a) = a \\ u_{\max}(a, b) = a \end{cases}$$

et donc $a \leq a \leq a \implies (2.10)$ est vérifiée.

$$\triangleright a = b = 0 \text{ alors } \begin{cases} \max(a, b) = 0 \\ u_\omega(a, b) = \min(1, 0) = 0 \\ u_{\max}(a, b) = 0 \end{cases}$$

et donc $0 \leq 0 \leq 0 \implies (2.10)$ est vérifiée.

Dans le reste de la démonstration, nous étudions les cas où $a > 0$ et $b > 0$.

• Borne inf : Montrons que

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} u_\omega(a, b) &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \min \left\{ 1, (a^\omega + b^\omega)^{1/\omega} \right\} \\ &= \max(a, b). \end{aligned}$$

*) 1^{ère} cas : si $0 < a \leq 1$ et $0 < b \leq 1 \implies a^\omega + b^\omega \leq 2$.

$(a^\omega + b^\omega)^{1/\omega} \leq 2^{1/\omega}$ donc par passage à la limite ($\omega \rightarrow +\infty$), $a^\omega + b^\omega \leq 1$.

Et par suite $\min \left[1, (a^\omega + b^\omega)^{1/\omega} \right] = (a^\omega + b^\omega)^{1/\omega}$.

D'où il suffit de montrer que $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} (a^\omega + b^\omega)^{1/\omega} = \max(a, b)$.

Supposons, sans perdre de généralité, que $0 < a < b$, on pose :

$$Q_\omega = (a^\omega + b^\omega)^{1/\omega} > 0 \implies \ln Q_\omega = \frac{\ln(a^\omega + b^\omega)}{\omega}$$

Alors :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \ln Q_\omega = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a^\omega + b^\omega)}{\omega}$$

Nous avons $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \ln(a^\omega + b^\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(b^\omega \left(\left(\frac{a}{b} \right)^\omega + 1 \right) \right) \right] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \omega \ln b + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \ln \left(\left(\frac{a}{b} \right)^\omega + 1 \right)$

Comme $0 < a < b \implies \frac{a}{b} < 1 \implies \left(\frac{a}{b} \right)^\omega \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0$

et donc : $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \ln(a^\omega + b^\omega) = +\infty$, et $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \omega = +\infty$ donc $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \ln Q_\omega = \frac{\infty}{\infty}$ (forme indéterminée).

En utilisant la règle d'Hôpital, puisque $\omega \mapsto \ln(a^\omega + b^\omega)$ pour $a, b \in]0, 1]$ et $\omega \mapsto \omega$ ($\omega > 0$) sont dérivables sur \mathbb{R}_*^+

Nous aurons :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \ln Q_\omega &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a^\omega + b^\omega)}{\omega} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(a^\omega + b^\omega))'}{\omega'} \end{aligned}$$

$$\omega' = 1$$

$$\begin{aligned}
(\ln(a^\omega + b^\omega))' &= \frac{(a^\omega + b^\omega)'}{a^\omega + b^\omega} \\
&= \frac{(e^{\ln(a^\omega)} + e^{\ln(b^\omega)})'}{a^\omega + b^\omega} \\
&= \frac{e^{\ln(a^\omega)} \ln a + e^{\ln(b^\omega)} \ln b}{a^\omega + b^\omega} \\
&= \frac{\ln a \cdot e^\omega + \ln b \cdot e^{\omega \ln b}}{a^\omega + b^\omega} \\
&= \frac{\ln a \cdot a^\omega + \ln b \cdot b^\omega}{a^\omega + b^\omega} \\
&= \frac{b^\omega \left[(\ln a) \cdot \frac{a^\omega}{b} + \ln b \right]}{\left(\frac{a^\omega}{b} + 1 \right) \cdot b^\omega} \\
&= \frac{(a/b)^\omega \ln a + \ln b}{(a/b)^\omega + 1}
\end{aligned}$$

Et donc $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \ln Q_\omega = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{(a/b)^\omega \ln a + \ln b}{(a/b)^\omega + 1} = \ln b$ (car nous avons supposé que $a < b$ et donc $a/b < 1$).

Alors $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \ln Q_\omega = \ln b$.

Comme $\omega \mapsto Q_\omega = \ln(a^\omega + b^\omega)^{1/\omega}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (sans problème)

alors $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \ln Q_\omega = \ln \left(\lim_{\omega \rightarrow +\infty} Q_\omega \right) = \ln b \implies \lim_{\omega \rightarrow +\infty} Q_\omega = b$.

Et par suite $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} (a^\omega + b^\omega)^{1/\omega} = b = \max(a, b)$.

Donc :

$$u_\omega(a, b) = \min\{1, (a^\omega + b^\omega)^{1/\omega}\} \geq \max(a, b). \quad (2.11)$$

Le raisonnement reste valable pour le cas $a > b$ (nous inter-changeons les rôles de a et b). \star) 2^{ème} cas : Si $a = 1$ ou $b = 1$ alors $\min[1, (a^\omega + b^\omega)^{1/\omega}] = 1 = u_\omega(a, b)$. et on a $(a^\omega + b^\omega)^{1/\omega} \geq 1 \implies a^\omega + b^\omega \geq 1 = \max(a, b)$.

$$\implies \lim_{\omega \rightarrow +\infty} (a^\omega + b^\omega)^{1/\omega} = 1 = \max(a, b) \quad (2.12)$$

Donc d'après 2.11 et 2.12 :

$$u_\omega(a, b) = \min \left[1, (a^\omega + b^\omega)^{1/\omega} \right] \geq \max(a, b).$$

Borne sup : Du moment où $\left. \begin{array}{l} u(0, b) = b \\ u(a, 0) = a \end{array} \right\}$ conditions aux limites vérifiées par le max.

indépendamment de ω .

Il est clair que $\lim_{\omega \rightarrow \infty} (a^\omega + b^\omega)^{1/\omega} = b \leq 1$ (pour $a < b$ et $\omega > 0$)

et alors $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \min \left[1, (a^\omega + b^\omega)^{1/\omega} \right] = b$.

et donc $u_\omega(a, b) \leq u_{\max}(a, b), \forall a, b \in [0, 1]$. C.Q.F.D

2. \square

Vérification : pour $\omega = 1$.

$$u_\omega(a, b) = 1 - \min \left[1, [(1-a)^\omega + (1-b)^\omega]^{1/\omega} \right]$$

$$u_1(a, b) = 1 - \min\{1, ((1-a) + (1-b))\} = 1 - \min\{1, 2 - a - b\}$$

$$= 1 - \min\{1, 2 - (a + b)\}$$

$$0 \leq a + b \leq 2 \Rightarrow 2 - (a + b) \geq 0$$

$$a = 1, b = 0 \Rightarrow u_1(1, 0) = 1 - \min(1, 2 - 1)$$

$$= 1 - \min(1, 1) = 0$$

$$u_{\min}(a, b) = 0 \leq 0 = u_1(1, 0) \leq 0 = \min\{a, b\}$$

Référence	Formule $u(a, b)$	Générateur croissant $g(a)$	Plage du paramètre	Lorsque le paramètre converge vers 0	Lorsque le paramètre converge vers 1 ou -1	Lorsque le paramètre converge vers $+\infty$ ou $-\infty$
Dombi [1982]	$\left\{ 1 + \left[\left(\frac{1}{a} - 1 \right)^\lambda + \left(\frac{1}{b} - 1 \right)^\lambda \right]^{\frac{-1}{\lambda}} \right\}^{-1}$	$\left(\frac{1}{a} - 1 \right)^{-\lambda}$	$\lambda > 0$	$u_{\max}(a, b)$	$\frac{ab}{a+b-ab}$ quand $\lambda = 1$	$\max(a, b)$
Frank [1979]	$1 - \log_a \left[1 + \frac{(s^{1-a}-1)(s^{1-b}-1)}{s-1} \right]$	$-\ln \left(\frac{s^{1-a}-1}{s-1} \right)$	$s > 0, s \neq 1$	$\max(a, b)$	$a + b - ab$ quand $s \rightarrow 1$	$\min(1, a + b)$
Hamacher [1978]	$\frac{a+b+(r-2)ab}{r+(r-1)ab}$	$-\ln \left(\frac{1-a}{r+(1-r)(1-a)} \right)$	$r > 0$	$\frac{a+b-2ab}{1-ab}$	$a + b - ab$ quand $r = 1$	$u_{\max}(a, b)$
Schweizer & Sklar 1 [1963]	$1 - \{\max(0, (1-a)^p + (1-b)^p - 1)\}^{\frac{1}{p}}$	$1 - (1-a)^p$	$p \neq 0$	$a + b - ab$	$\min(1, a + b)$, quand $p = 1$; $\frac{a+b-2ab}{1-ab}$, quand $p = -1$.	$u_{\max}(a, b)$ quand $p \rightarrow \infty$ $\min(a, b)$ quand $p \rightarrow -\infty$
Schweizer & Sklar 2	$[a^p + b^p - a^p b^p]^{\frac{1}{p}}$	$\ln [1 - a^p]^{\frac{1}{p}}$	$p > 0$	$u_{\max}(a, b)$	$a + b - ab$ quand $p = 1$	$\max(a, b)$
Schweizer & Sklar 3	$1 - \exp \left(- (\ln(1-a) ^p + \ln(1-b) ^p)^{\frac{1}{p}} \right)$	$ \ln(1-a) ^p$	$p > 0$	$u_{\max}(a, b)$	$a + b - ab$ quand $p = 1$	$\max(a, b)$
Schweizer & Sklar 4	$1 - \frac{(1-a)(1-b)}{[(1-a)^p + (1-b)^p - (1-a)^p(1-b)^p]^{\frac{1}{p}}}$	$(1-a)^{-p} - 1$	$p > 0$	$a + b - ab$	$\min \left(1, \frac{a+b}{1-ab} \right)$ quand $p = 1$	$\max(a, b)$
Yager [1980]	$\min \left[1, (a^\omega + b^\omega)^{\frac{1}{\omega}} \right]$	a^ω	$\omega > 0$	$u_{\max}(a, b)$	$\min(1, a + b)$ quand $\omega = 1$	$\max(a, b)$
Dubois & Prade [1980]	$1 - \frac{(1-a)(1-b)}{\max((1-a), (1-b), \alpha)}$		$\alpha \in [0, 1]$	$\max(a, b)$	$a + b - ab$ quand $\alpha = 1$	
Weber [1983]	$\min \left(1, a + b - \frac{\lambda}{1-\lambda} ab \right)$	$\frac{1}{\lambda} \ln \frac{1+\lambda}{1+\lambda(1-a)}$	$\lambda > -1$	$\min(1, a+b)$	$u_{\max}(a, b)$ as $\lambda \rightarrow -1$ $\min(1, (a+b-ab/2))$ quand $\lambda = 1$	$a + b - ab$
Yu [1985]	$\min(1, a + b + \lambda ab)$	$\frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda a)$	$\lambda > -1$	$\min(1, a+b)$	$a + b - ab$ quand $\lambda \rightarrow -1$ $\min(1, a + b + ab)$ quand $\lambda = 1$	$u_{\max}(a, b)$

TABLE 2.2 – Tableau des classes des générateurs croissants et celles des t-conormes correspondantes [3]

Introduction

Parmi les concepts qui sont alors introduits dans le cadre de la théorie des sous-ensembles flous étudiés au chapitre 2 et qui ont des applications dans la vie courante, nous pouvons citer les relations floues qui mettent en évidence des liaisons imprécises ou graduelles entre éléments d'un même sous ensemble flou, les quantités floues qui permettent de manipuler des mesures d'imprécision et d'évaluer les variables linguistiques bases d'éléments d'un sous-ensemble flou.

Une liaison entre deux ensembles de référence X et Y peut être difficilement représentative par une relation classique, parce qu'elle est imprécise ou graduellement mal connue.

Par exemple, si X est le sous ensemble flou des prix d'achat et Y celui des prix de vente « le prix d'achat est très inférieur au prix de vente » définit une classe imprécise de prix de vente correspondant à chaque prix d'achat et la relation entre X et Y que nous l'introduisons ainsi est de plus en plus satisfaite au fur et à mesure que les valeurs des éléments de X deviennent de plus en plus faibles par rapport à celles des éléments de Y , jusqu'à une satisfaction totale.

A travers la présente, nous allons traduire la théorie de sous ensembles flous soutenue depuis les premiers chapitres en relations logiques "floues" qui va nous permettre de concrétiser la finalité de cette théorie et ses applications, comme nous allons le parcourir le long du dernier chapitre.

3.1 Relations floues et Base des règles

3.1.1 Relations floues [15]

La description de tout système fait, généralement, intervenir plusieurs univers de références.

Soient X_1, X_2, \dots, X_n des ensembles classiques, et soit $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ leur produit cartésien.

Définition 3.1 (produit des sous-ensembles flous)

Soient des sous-ensembles flous A_1, A_2, \dots, A_n respectivement définis sur X_1, X_2, \dots, X_n . Leur produit cartésien $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ est défini comme un sous-ensemble flou de X et de fonction d'appartenance μ_A tel que :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X, \quad \mu_A(x) = \min\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)\}$$

Définition 3.2 (Relation floue) Une relation floue R définie sur le produit cartésien $X = X_1 \times \dots \times X_n$ est un sous ensemble flou (n -dimensionnel) et est noté :

- Dans le cas discret :

$$R = \sum_{X_1 \times \dots \times X_n} \mu_R(x_1, x_2, \dots, x_n) / (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

avec

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X, \quad \mu_R(x) = \min\{\mu_{X_1}(x), \mu_{X_2}(x), \dots, \mu_{X_n}(x)\}$$

- Dans le cas continu :

$$R = \int_{X_1 \times \dots \times X_n} \mu_R(x_1, x_2, \dots, x_n) / (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Lorsque les sous-ensembles flous sont multidimensionnels, leur fonction d'appartenance est aussi communément appelée relation floue.

Exemple : Prenons par exemple $X_1 = \{ \text{jaune (j), bleu (b)} \}$ et $X_2 = \{ \text{rond (r), long (l)} \}$, on pose les sous ensembles flous :

$A_1 = \{j/0.8, b/0.2\}$ et $A_2 = \{r/0.4, l/0.6\}$ alors, le produit cartésien :

$A_1 \times A_2 = \{(j, r)/0.4, (j, l)/0.6, (b, r)/0.2, (b, l)/0.2\}$ peut définir une relation floue entre la couleur et la forme dans laquelle «jaune» et «long» sont les attributs les plus liés.

3.1.2 Base des règles [20]

Une relation floue est assurée par un nombre de règles floues " SI - ALORS " :

$$\text{SI } (X \text{ est } A) \text{ ET } (Y \text{ est } B) \text{ Alors } (Z \text{ est } C).$$

avec

- A et B : prédicats.
- $(X \text{ est } A), (Y \text{ est } B)$: prémisse.
- ET : conjonction.
- ALORS : implication.
- $(Z \text{ est } C)$: conclusion.

Ces règles peuvent être obtenues par :

- Une représentation de connaissances exprimées de façon naturelle par des acteurs humains , qu'ils soient experts, observateurs du système étudié ou opérateurs spécialisés .
- L'adaptation d'un modèle d'inférence prédéfini ou amélioré (exemple du contrôleur flou : voir Application : Chapitre 4).

Parmi les principales règles utilisées dans les relations floues, on cite :

- Les modus ponens : un raisonnement qui consiste à valider une implication (si A alors B »).
- Les modus tollens : c'est un raisonnement selon lequel : P implique Q » \implies " $\neg Q$ implique $\neg P$ ".

La base des règles floues possède un certain nombre de propriétés : continuité, consistance et complétude, telles que :

Continuité : Un ensemble de règles floues " SI - ALORS " est continu si toutes les prémisses de règles " adjacentes " ont des conclusions " adjacentes ". Les sous-ensembles flous adjacents sont ceux qui se recouvrent.

Consistance : Un ensemble de règles floues " SI - ALORS " est consistant s'il ne contient pas de contradictions. Autrement dit , un ensemble de règles floues " SI - ALORS " est inconsistant s'il existe

au moins deux règles de prémisses identiques mais de conclusions différentes.

Complétude : Un ensemble de règles floues " SI - ALORS " est complet si , quelle que soit la combinaison dans l'espace d'entrée, il existe au moins une valeur de commande. Dans ce cas, on dit que la règle est activée ou activable.

Exemple : [Exemple de règles floues] Règles de conduite automobile à l'approche d'un carrefour contrôlé par des feux tricolores [12] :

si le feu est rouge...	si ma vitesse est élevée...	et si le feu est proche...	alors je freine fort.
si le feu est rouge...	si ma vitesse est faible...	et si le feu est loin...	alors je maintiens ma vitesse.
si le feu est orange...	si ma vitesse est moyenne...	et si le feu est loin...	alors je freine doucement.
si le feu est vert...	si ma vitesse est faible...	et si le feu est proche...	alors j'accélère.

Les règles floues sont énoncées en langage naturel (variables linguistiques).

Si nous transposons cet exemple selon un modèle plus mathématique « moins flou » nous aurons ce qui suit :

Si le feu est rouge, si ma vitesse dépasse 85,6 Km/H et si le feu est à moins de 62,3 mètres, alors j'appuie sur la pédale de frein avec une force de 33,2 Newtons!!!

Notre cerveau fonctionne en logique floue. Elle apprécie les variables d'entrées de façon approximative (faible, élevée, loin, proche), fait de mêmes pour les variables de sorties (freinage léger ou fort) et édicte un ensemble de règles permettant de déterminer les sorties en fonction des entrées.

L'approche des problèmes par la logique floue est différente de celle adoptée, à priori, dans une démarche scientifique.

Elle est beaucoup plus pragmatique que déterministe.

La décision en logique floue est basée sur la notion d'expertise, qui permet de quantifier le flou à partir de connaissance à priori ou acquise antérieurement.

Il n'est pas nécessaire d'avoir un modèle entrées/sorties d'une voiture pour pouvoir la conduire de manière satisfaisante.

3.2 Principe du raisonnement approximatif et Inférence floue

3.2.1 Inférence floue [13] [17] [20]

C'est l'opération logique par laquelle nous admettons une proposition en vertu de sa liaison avec d'autres propositions tenues pour vraies.

\leftrightarrow En logique classique : Si p Alors q càd p vrai Alors q vrai.

\leftrightarrow Si (X est A) Alors (Y est B)

1. La variable floue x_0 est la variable linguistique $x_0 \in X$ qui appartient au sous-ensemble A avec un degré d'appartenance $\mu_A(x_0)(= \mu_{\text{premise}}(x_0))$.

- La variable floue y est la variable linguistique $y \in Y$ qui appartient au sous-ensemble B à un degré $\mu_B(y)(= \mu_{\text{conclusion}}(y))$. qui dépend du degré de validité de la prémisse.

Dénomination	Intersection ET (t-norme)	Réunion OU (t-conorme)	Complément NON
Opérateurs de Zadeh MIN/MAX	$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$
Probabiliste PROD/PROBOR	$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \times \mu_B(x)$	$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \times \mu_B(x)$	$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

FIGURE 3.1 – Opérateurs d'inférence floue les plus utilisés [12].

3.2.2 Principe du raisonnement approximatif

Plus la condition sur les entrées est vraie, Plus l'action préconisée pour les sorties doit être respectée.

SI la température est très basse ALORS Chauffer fort.

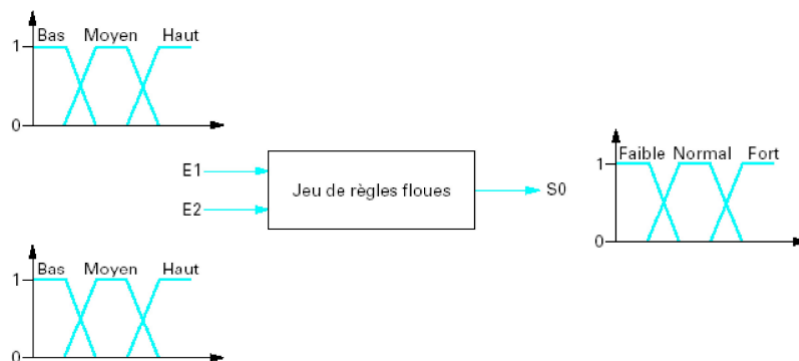
Cette appartenance dépend de :

- Du sous-ensemble flou de sortie considérée.(la commande)
- Du degré de validité de la prémisse $\mu_{\text{prémises}}(x_0)$.
- De la méthode d'implication choisie.

3.3 Méthodes principales [15] [5]

3.3.1 Méthodes d'implication : Méthode de Mamdani

Deux méthodes principales d'implication floue se distinguent :



- Méthode de Mamdani :**

$$\mu'_{\text{conclusion}}(y) = \min_y \{ \mu_{\text{prémisse}}(x_0), \mu_{\text{conclusion}}(y) \}$$

- Méthode de Larsen :**

$$\mu'_{\text{conclusion}}(y) = \mu_{\text{prémisse}}(x_0) \times \mu_{\text{conclusion}}(y)$$

Plus la condition sur les entrées est vraie, plus l'action préconisée pour les sorties doit être respectée

Activation des règles

- R_1 : Si (X_1 est A_{11}) et (X_2 est A_{12}) alors (Y est B_1)
- R_2 : Si (X_1 est A_{21}) ou (X_2 est A_{22}) alors (Y est B_2)
- R_3 : Si (X_1 est A_{31}) et (X_2 est A_{32}) et (X_3 est A_{33}) alors (Y est B_3)
- ...

Remarque :

- Une règle est activée dès qu'elle a une prémisse ayant une valeur de vérité (degré d'appartenance) non nulle.
- Plusieurs règles peuvent être activées simultanément.
- Préconiser des actions avec différents degrés de validité (degré d'appartenance); ces actions peuvent être contradictoires.

Il convient d'agréger les règles pour fournir une appartenance de la variable floue de sortie à une classe floue consolidée (réelle).

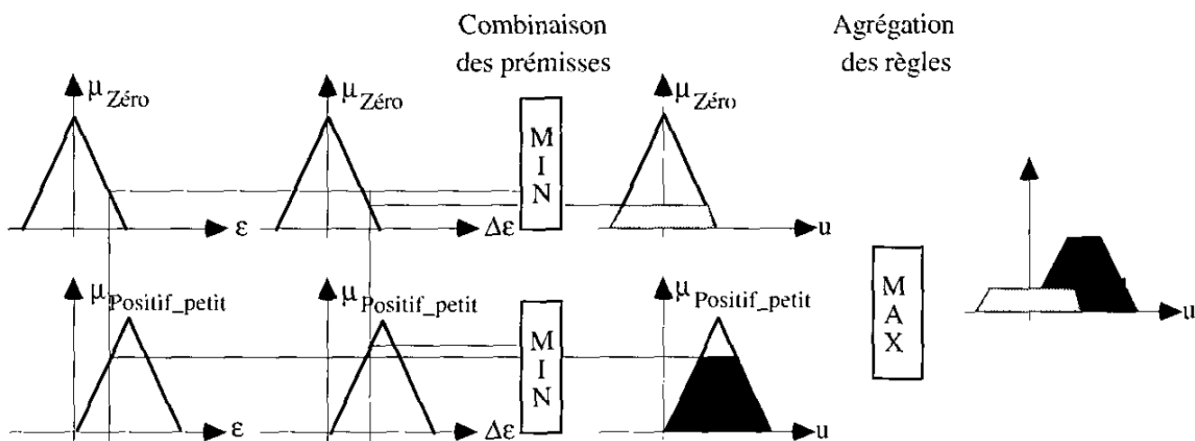


FIGURE 3.2 – Schéma de principe de la méthode de Mamdani.

3.3.2 Méthodes de défuzzification

1. Méthode du centre de gravité (COG) : - Cas d'un univers de discours X discret : sortie (ou

$$\text{commande}) = \frac{\sum_i x_i \mu(x_i)}{\sum_i \mu(x_i)}.$$

- Cas d'un univers de discours X continu :

$$\text{sortie} = \frac{\int y \mu(y) dy}{\int \mu(y) dy}$$

2. Méthode moyenne des maximums (MM) :

C'est la moyenne des valeurs de sorties les plus vraisemblables

$$\text{sortie} = \frac{\int_S y dy}{\int_S dy}$$

Où $S = \{y_0 \in U / \mu(y_0) = \sup_{y \in U}(\mu(y))\}$

Remarque :

- En commande floue, la défuzzification COG est presque toujours utilisée. Elle prend en compte l'influence de l'ensemble des valeurs proposées par la solution floue.

Le but de ce chapitre est d'établir une application de la logique floue à la base de ce qui a été étudié aux chapitres précédents dans un but de concrétiser la théorie et de visualiser l'importance de la démarche et la de syntaxe de la défuzzification des résultats en optant à la fois à un calcul théorique (suivant les formules retenues pour les opérations standards sur les ensembles floues et les méthodes d'agrégation) et à une modélisation informatique du problème étudié via le logiciel Matlab.

4.1 Note de présentation et Problématique

4.1.1 Présentation

Un contrôleur flou [16] est un système qui permet la commande de processus avec des données imprécises formalisées par des variables linguistiques (floues) avec leurs fonctions d'appartenance. L'illustration ci-dessous présente un schéma technique ou algorithme d'un contrôleur flou :

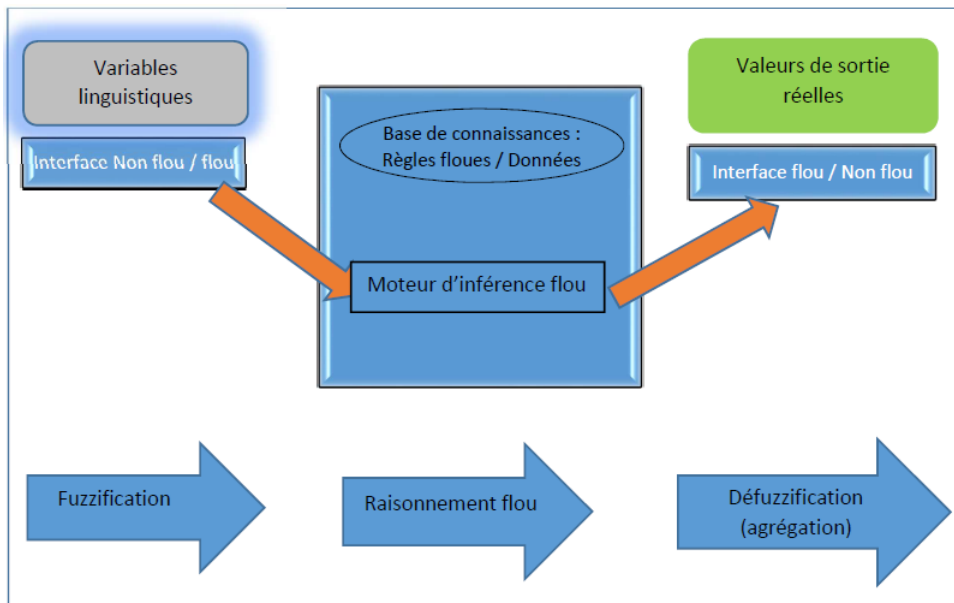


FIGURE 4.1 – Contrôleur flou

En terme d'algorithme, le contrôle flou est l'étude, la mise au point et l'expérimentation de systèmes basés sur des règles exprimées par des catégories (variables) linguistiques mal définies telles que :

$$\text{si } (X \text{ est } A1) \text{ et } (Y \text{ est } A2) \text{ alors } (U \text{ est } B)$$

où A1, A2, B sont des prédicats (sous ensembles flous) mentionnés comme «grand positif», «moyen», «presque nul»...

Le principe de cet algorithme de contrôle, consiste simplement, à réaliser une «interpolation» entre un petit nombre de situations connues données par un expert sous la forme de règles floues du genre «si x est petit et y est modéré, alors u doit être très grand». La mise au point des prédicats évoqués par ces règles se fait généralement de façon empirique, mais de plus en plus, différentes méthodes d'apprentissage ont été appliquées dans le but d'avoir des systèmes de contrôle auto-adaptatif.

4.1.2 Problématique

Les usines de procédés modernes, dans le secteur hydromécanique, utilisent un vaste réseau de boucles de contrôle pour fabriquer un produit final à distribuer sur le marché. Ces boucles de contrôle sont conçues pour garder une variable du procédé (comme la pression, le débit, la température, etc.) dans une plage de fonctionnement donnée, afin de garantir la qualité du produit final. Chacune de ces boucles reçoit et crée des interférences internes qui portent préjudice aux variables du procédé (PV). L'interaction d'autres boucles du réseau provoque elle aussi des interférences qui influent sur la variable du procédé (figure.4.2)

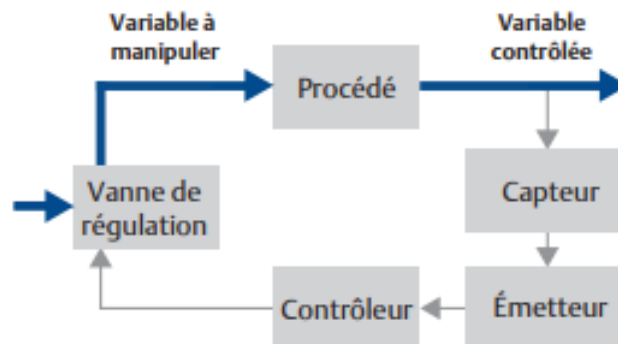


FIGURE 4.2 – Boucle de contrôle de rétroaction [14].

L'élément de contrôle final le plus commun dans le secteur du contrôle de procédé est la vanne de régulation. La vanne de régulation gère un fluide qui coule, comme le gaz, la vapeur, l'eau ou des produits chimiques, afin de compenser les interférences de charge et de maintenir la variable de procédé régulée à une valeur la plus proche possible du point de consigne voulu [14].

Exemples de vannes de régulation :



FIGURE 4.3 – Vanne de régulation.

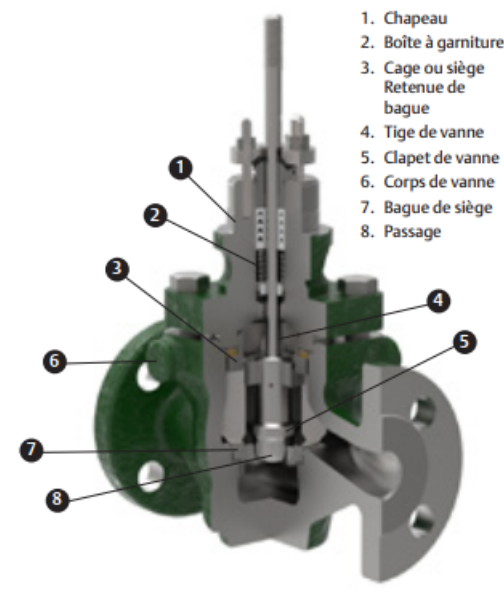


FIGURE 4.4 – Vanne de régulation à tige montante – coupe [14].

La fonderie permet d'obtenir des pièces creuses, des pièces complexes avec des cavités non régulières (figure 4.6). La précision des cotes permet de supprimer les reprises de finition, réduisant ainsi les coûts d'usinage comme de matières.

Les vannes ont généralement des formes complexes et leur moulage dans une usine de fonderie nécessite une grande précaution d'usinage en mettant en place (dans le moule) l'empreinte de la forme exacte que doit prendre la vanne. Et toute anomalie ou perte de précision jouera un rôle rétrogradant qui pénalisera le fonctionnement optimal des vannes sous différentes conditions telles que : la température, la pression, le sectionnement du réseau approprié (arrosage, eau potable, gaz,...)...

Le paramètre étudié fait partie du système de régulation des vannes au cours d'usinage en fonte. Ce qui permet d'agir au préalable, en adoptant une technique de « machine Learning » - branche de l'Intelligence

Artificielle – sur les facteurs de la fabrication avant de se lancer dans le processus de la production et de la commercialisation.

Le contrôleur flou à étudier consiste en l'ajustement d'une vanne dans une usine de fonderie.

Il s'agit de régler un paramètre [16] servant au débit d'une vanne entre un réceptacle contenant du métal en fusion et un deuxième bassin dont le niveau est mesuré par la hauteur h . Ce dernier se déversant dans un moule.



FIGURE 4.5 – L'opération de moulage de vannes dans une usine de fonderie.



FIGURE 4.6 – Vanne en fonte.

4.2 Etude et modélisation

4.2.1 Etapes de mise en œuvre d'un contrôleur flou

Nous pouvons citer les étapes comme suit :

1. Définition des E/S du contrôleur.
2. La fuzzification.
3. Définition de la base de règles (floues).

4. Inférence des règles activées : selon la méthode retenue (Mamdani, Sugeno...).
5. Défuzzification : selon la méthode retenue (Centre de gravité, Moyenne des maximum...).

Les données [16] (selon une expertise réalisée) ;

- Le paramètre qualifiant h est défini dans un intervalle de 75 à 85cm.
- Le paramètre du déplacement relatif dh est défini entre $-0,9$ et $1.2cm/s$.
- La commande u prend ses valeurs entre -1 et 1 .

4.2.2 Paramétrage des variables linguistiques et Règles d'inférence

★ Paramètre d'entrée h :

Petit (P)	(75, 77, 78, 79)– un quadruplet
Moyen (M)	(78, 79, 81, 83)– un quadruplet
Haut (H)	(80, 83, 85, 85)– un quadruplet

TABLE 4.1 – paramétrage de l'univers de discours de h .

★ Paramètre d'entrée dh :

Très négatif (TN)	($-0.9, -0.7, -0.3$)– un triplet
Négatif (N)	($-0.4, 0, 0.2$)– un triplet
Positif (P+)	($0, 0.4, 0.6$)– un triplet
Très positif (TP)	($0.2, 0.8, 1$)

TABLE 4.2 – paramétrage de l'univers de discours de dh .

★ La commande de sortie u :

Bas (B)	($-1, -0.4, -0.2$)– un triplet
Moyen haut (MH)	($-0.4, 0, 0.8$)– un triplet
Haut (H)	($0.2, 0.8, 1$)– un triplet

TABLE 4.3 – paramétrage de l'univers de discours de u .

Règles d'inférence

Sont établies par expertise entamée par des experts dans le domaine (ingénierie mécanique et hydraulique)
Soit :

h est petit et dh est très négatif \Rightarrow u est haut	h est petit et dh est négatif \Rightarrow u est haut
h est petit et dh est positif \Rightarrow u est haut	h est petit et dh est très positif \Rightarrow u est moyen-haut
h est moyen et dh est très négatif \Rightarrow u est haut	h est moyen et dh est négatif \Rightarrow u est haut
h est moyen et dh est positif \Rightarrow u est bas	h est moyen et dh est très positif \Rightarrow u est bas
h est haut et dh est très négatif \Rightarrow u est bas	h est haut et dh est négatif \Rightarrow u est bas
h est haut et dh est positif \Rightarrow u est bas	h est haut et dh est très positif \Rightarrow u est bas

TABLE 4.4 – Base de règles.

4.3 Applications

4.3.1 Travail demandé

- Spécifier les différentes étapes de la conception d'un contrôleur flou.
- Appliquer chaque étape au problème étudié en précisant les connaissances utilisées (On spécifiera la matrice d'inférence).
- Application : Simuler le fonctionnement du contrôleur flou avec les paramètres d'entrée suivantes [16] :

$$h = 81.5 \text{ cm et } dh = 0.1 \text{ cm/s}$$

- 1^{ère} étape = Définition des E/S du contrôleur :
Nous avons deux entrées h et dh et une sortie u donc 2E/1 S, soit :



- 2^{ème} étape = La fuzzification :

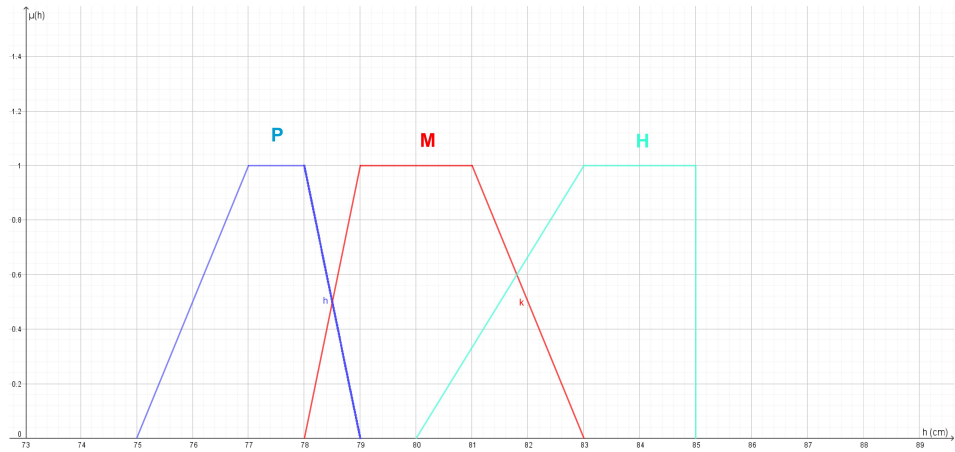


FIGURE 4.7 – Représentation de la fonction d'appartenance du paramètre h .

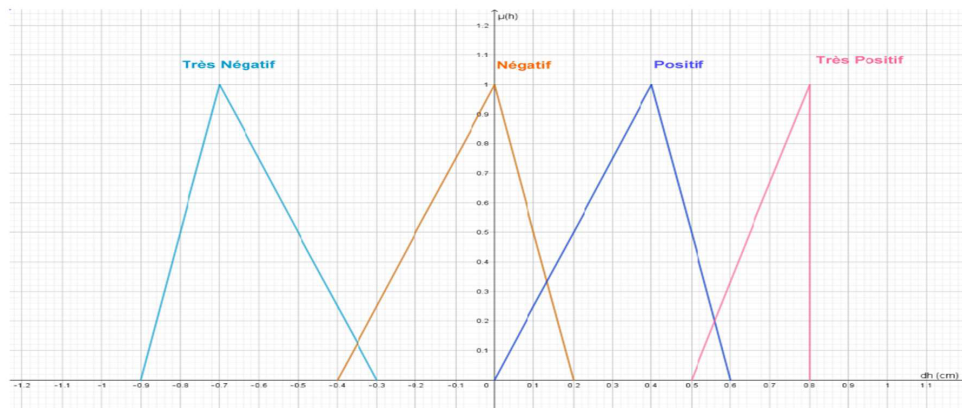


FIGURE 4.8 – Représentation de la fonction d'appartenance du paramètre dh .

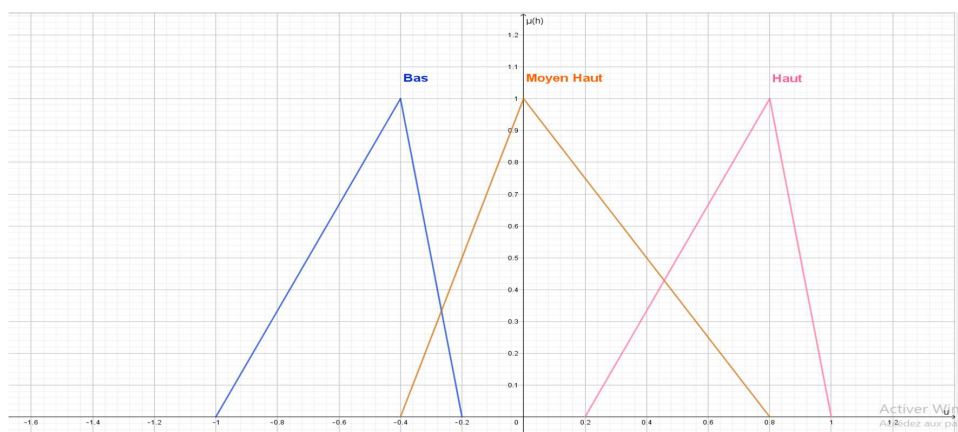


FIGURE 4.9 – Représentation de la fonction d'appartenance du paramètre u

- 3^{ème} étape = Les règles floues

Cette étape consiste à obtenir une matrice de règles qui peut être équivalente à un tableau de

vérité en cas de la logique booléenne :

Modélisation des règles de l'expert	N° Règle	Modélisation des règles de l'expert	N° Règle
h est petit (P) et dh est très négatif (TN) \Rightarrow u est haut (H)	R1	h est petit (P) et dh est négatif (N) \Rightarrow u est haut (H)	R2
h est petit (P) et dh est positif (P+) \Rightarrow u est haut (H)	R3	h est petit (P) et dh est très positif (TP) \Rightarrow u est moyen-haut (MH)	R4
h est moyen (M) et dh est très négatif (TN) \Rightarrow u est haut (H)	R5	h est moyen (M) et dh est négatif (N) \Rightarrow u est haut (H)	R6
h est moyen (M) et dh est positif (P+) \Rightarrow u est bas (B)	R7	h est moyen (M) et dh est très positif (P) \Rightarrow u est bas (B)	R8
h est haut (H) et dh est très négatif (TN) \Rightarrow u est bas (B)	R9	h est haut (H) et dh est négatif (N) \Rightarrow u est bas (B)	R10
h est haut (H) et dh est positif (P+) \Rightarrow u est bas (B)	R11	h est haut (H) et dh est très positif (TP) \Rightarrow u est bas (B)	R12

TABLE 4.5 – Règles activées (activables).

Matrice d'inférence (combinaison des relations)

u		dh							
		TN		N		P+		TP	
h	P	H	R1	H	R2	H	R3	MH	R4
	M	H	R5	H	R6	B	R7	B	R5
	H	B	R9	B	R10	B	R11	B	R12

TABLE 4.6 – Matrice d'inférence floue (tableau de vérité).

$$u = (h_i, dh_j)_{1 \leq i \leq 3 \text{ et } 1 \leq j \leq 4}$$

- 4ème étape = Inférence sur les règles activées (ou activables)

Elle consiste à activer les valeurs de l'Entrée proposées par l'utilisateur (l'expert), soit $h = 81.5$ cm et $dh = 0.1$ cm/s pour agir sur le paramètre de la Sortie u de la régulation de la vanne, par projection sur les sous-ensembles flous P, M et H de l'Univers h d'une part, et sur les TN, N, P+ (Positif), et TP de l'Univers dh d'autre part, et ce pour obtenir les poids ou les degrés d'appartenance relatifs à chaque sous ensemble flous.

Nous aboutissons à la fin, à la base de règles de MAMDANI, à un tableau récapitulatif qui permet le passage à l'agrégation des résultats qui est la 5^{ème} et dernière étape : la défuzzification.

Tout d'abord nous représentons l'état de la projection des valeurs d'entrée sur les sous-ensembles

fous de h et dh .

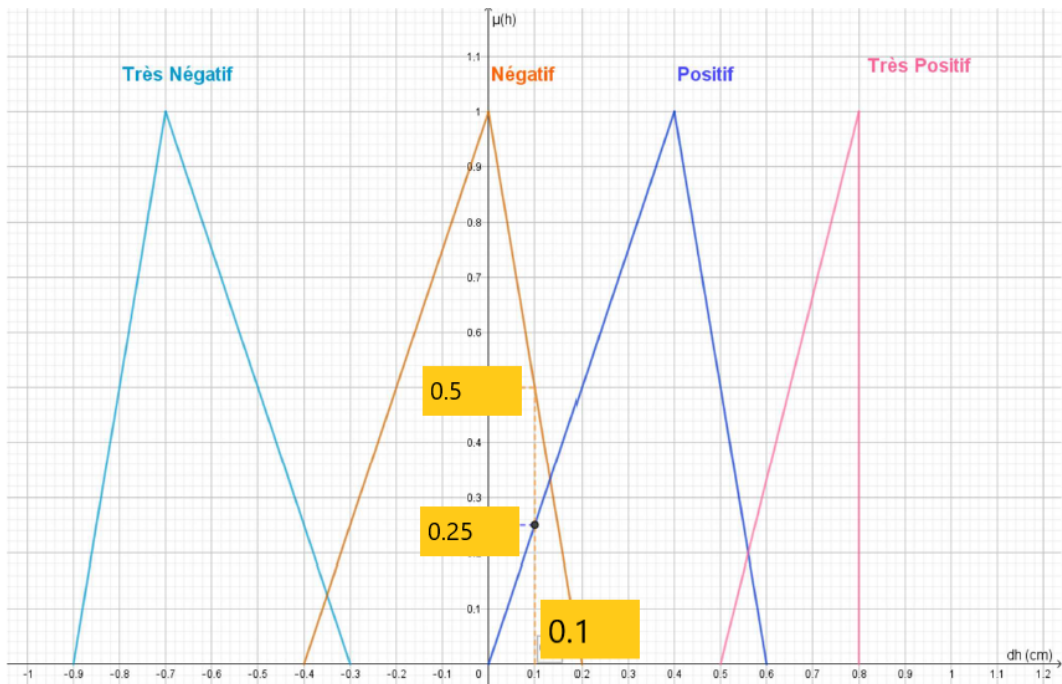


FIGURE 4.10 – La valeur d’activation de $dh = 0.1$.

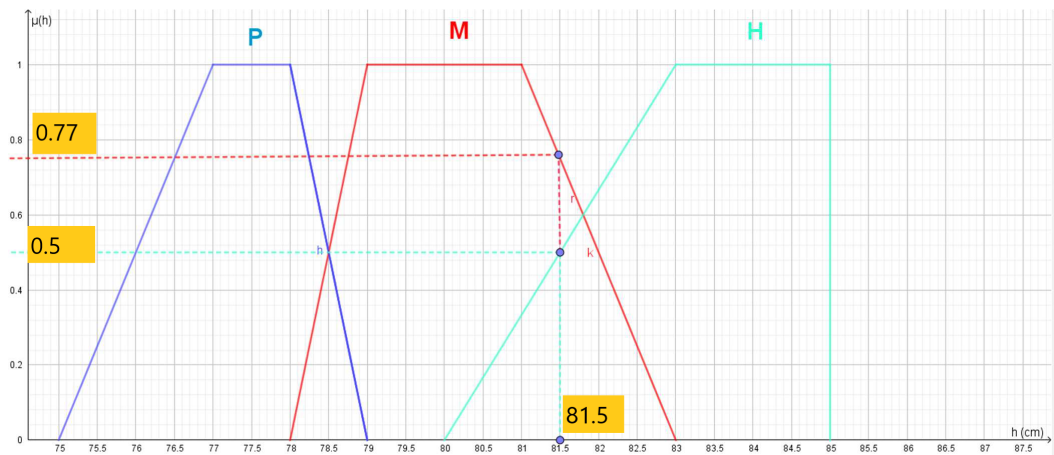


FIGURE 4.11 – La valeur d’activation de $h = 81.5$.

Commentaire :

Puisque seuls les sous-ensembles **N** et **P+** (Positif) de l’Univers de discours **dh** qui sont concernés par la projection de la valeur d’entrée **dh = 0.1**, et les sous-ensembles **M** et **H** de l’Univers de discours **h** qui représentent l’espace de la projection de la valeur d’entrée **h = 81.5**, alors on n’aura que les règles **R6 - R7 - R10 et R11** (pour ces valeurs d’entrée) qui seront activées.

Agrégation : Règles de Mamdani :

Nous allons opter pour les règles de Mamdani (selon un choix subjectif) pour dimensionner les paramètres activés (on valorise les règles) par la formule de Mamdani telle que :

Soit le tableau récapitulatif suivant : Pour : $h = 81.5\text{cm}$ et $dh = 0.1\text{cm/s}$.

N° Règle	Entrées					Implication	Sorties u			
	Univers h		Conjonction	Univers dh			Principe MAMDANI			Commentaire
	Sous Ensemble Flou			Sous Ensemble Flou			Conclusion u	Min($\mu(u)$)	$\mu(u)$ retenu	
	Sous ensemble retenu	Degré d'appartenance μ		Sous ensemble retenu	Degré d'appartenance μ					
R6	M	0.77	Et	N	0.5	Alors	H	0.5	0.5	
R7	M	0.77	Et	P+	0.25	Alors	B	0.25	0.5	D'après la méthode de Mamadani, on retient le max(min μ) lorsque les sous-ensembles flous de sortie sont identiques
R10	H	0.5	Et	N	0.5	Alors	B	0.5		
R11	H	0.5	Et	P+	0.25	Alors	B	0.25		

TABLE 4.7 – Agrégation des résultats.

- 5ème étape = La défuzzification

Cette dernière étape du processus du contrôleur flou, consiste à valoriser le paramètre de la sortie u (valeur non floue) à partir des sous-ensembles flous retenus pendant l'étape précédente à savoir :

$$\{(H, \mu_H(u))\} \text{ et } \{(B, \mu_B(u))\}$$

Soit la représentation graphique suivante :

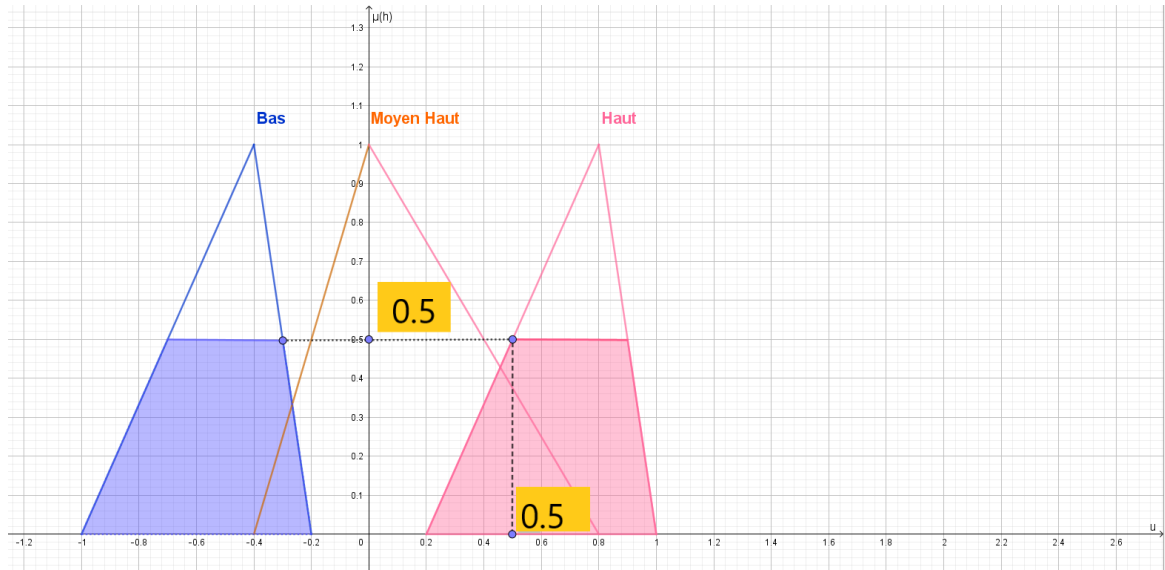


FIGURE 4.12 – L'état final du paramètre de la sortie u (la commande)

Pour la défuzzification, nous allons utiliser la méthode du centre de gravité, comme est avancé sur la partie théorique.

Cette méthode repose sur le calcul de l'abscisse du centre de gravité de la surface sous la courbe du sous ensemble flou retenu pour la sortie.

Nous procéderons ainsi :

1. La subdivision de l'aire du sous ensemble flou S de la sortie en des surfaces élémentaires S_i (on fixe par exemple un pas de 0.1 pour chaque u_i sur l'axe des abscisses) : On commence du sous ensemble flou B vers H en introduisant un abscisse u_i à chaque surface S_i .
2. Le calcul de l'aire élémentaire par le poids $(u_i, \mu_{S_i}(u_i))$.
3. L'application de la formule du calcul :

$$CG = \frac{\sum_i \mu_{S_i}(x) \cdot x}{\sum_i \mu_{S_i}(x)}$$

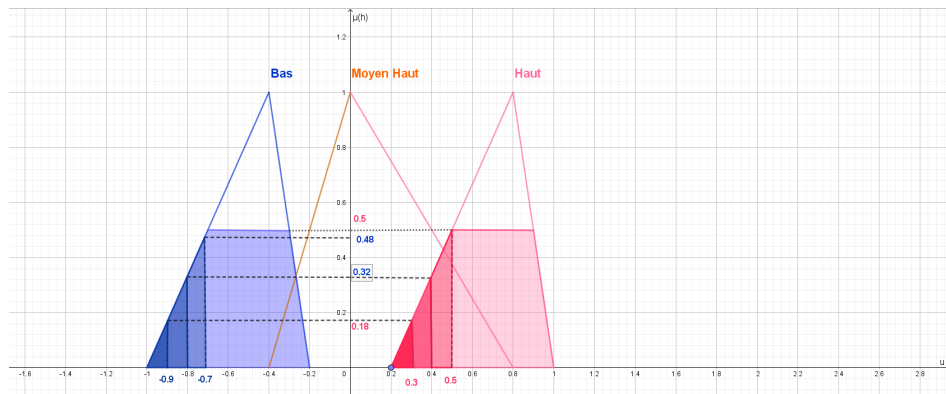


FIGURE 4.13 – Subdivision des sous ensembles flous de la sortie en surfaces élémentaires.

Nous obtiendrons :

$$u = \frac{0.18(-0.9) + 0.32(-0.8) + 0.48(-0.7) + 0.5(-0.6) + 0.9(-0.5) + 0.5(-0.4) + 0.31(-0.3) + 0.18(0.3) + (0.4)0.32 + 0.5(0.5) + (0.6)0.5 + (0.7)0.78 + (0.8)0.5 + (0.9)0.5}{0.18 + 0.32 + 0.48 + 0.5 + 0.9 + 0.5 + 0.3 + 0.18 + 0.32 + 0.5 + 0.5 + 0.78 + 0.5 + 0.5}$$

Donc : $u = 0.0416 = 4.2\%$

Commentaire :

L'agrégation des résultats obtenus pour le contrôle u est satisfaisante du moment où si nous agissons au départ (inférence et règles logiques vraies sur les paramètres h et dh), l'ajustement de la vanne dans l'usine est atteint à $u = 4.2\%$ d'erreur d'usinage ce qui rentre fort probable dans les tolérances de fabrication admises par les services compétents (laboratoires d'étalonnage du matériel, les concessionnaires des réseaux étudiés...).

4.3.2 Sortie Logiciel MATLAB

Edité par MathWorks, **MATLAB** (Matrix Laboratory) est un langage de programmation scientifique orienté calcul numérique. Il permet par exemple la manipulation d'algorithmes, l'affichage de graphique ou encore la génération de matrices.

Parmi les principales utilisation du Matlab on cite :

- La modélisation des systèmes de contrôle,
- La machine et deep learning,
- L'automatisation des tests,
- La maintenance prédictive...

Ci-après les éditions du logiciel MATAB de différentes étapes de la conception du contrôleur flou.

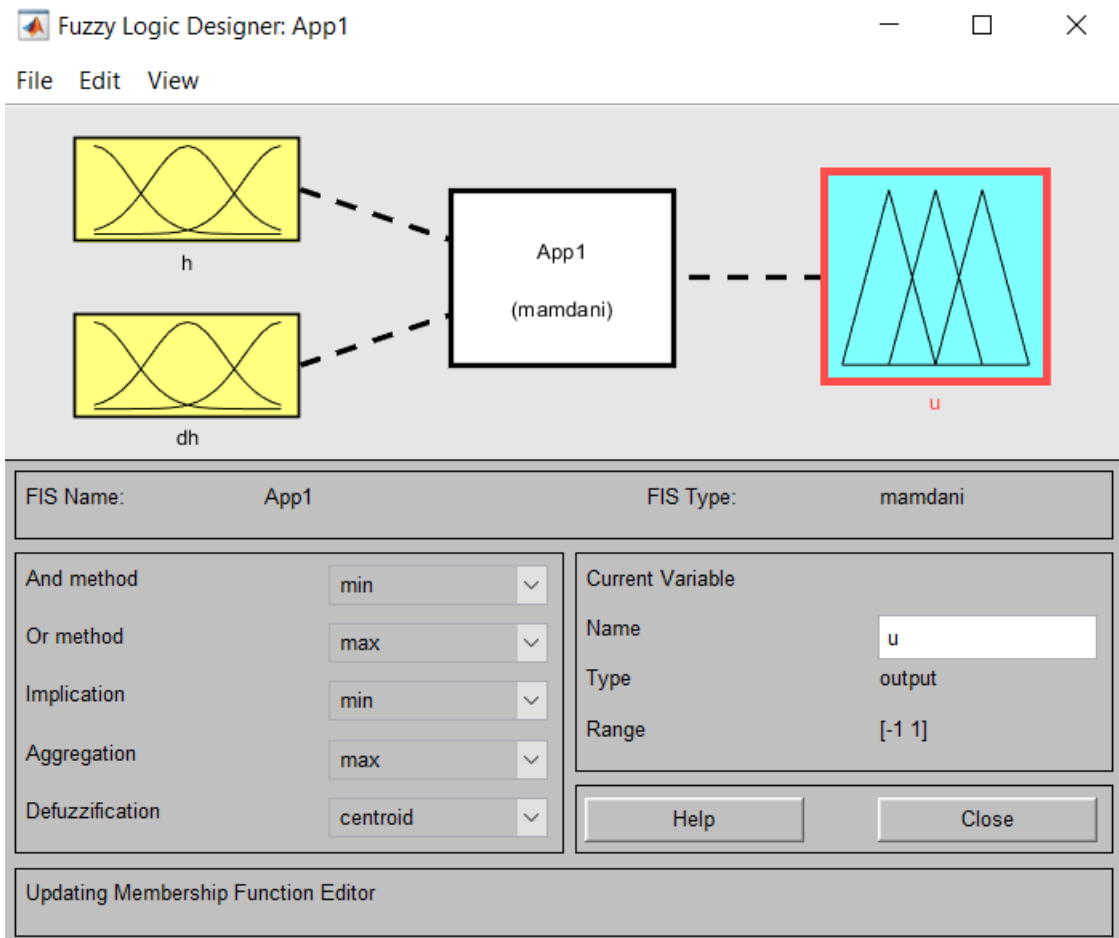


FIGURE 4.14 – Définition du contrôleur flou.

(a) Fizzification

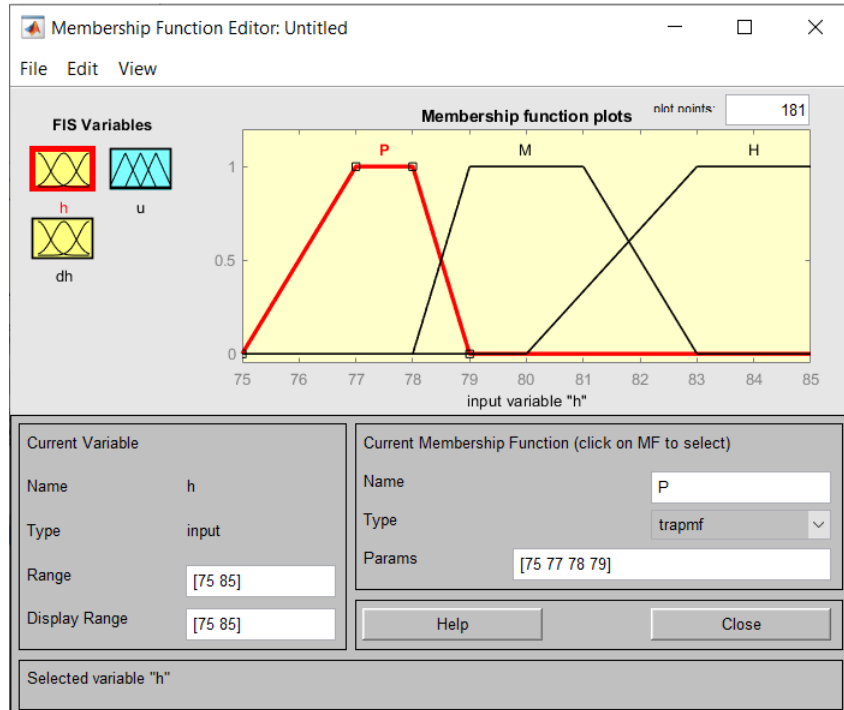


FIGURE 4.15 – Les degrés d'appartenance des sous-ensembles flous du paramètre d'entrée h .

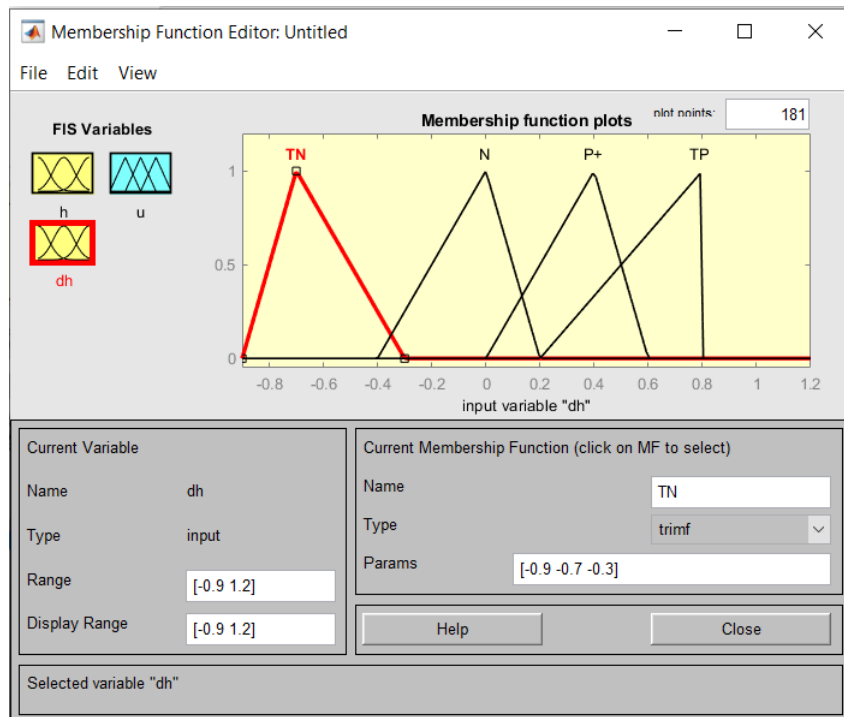


FIGURE 4.16 – Les degrés d'appartenance des sous-ensembles flous du paramètre d'entrée dh .

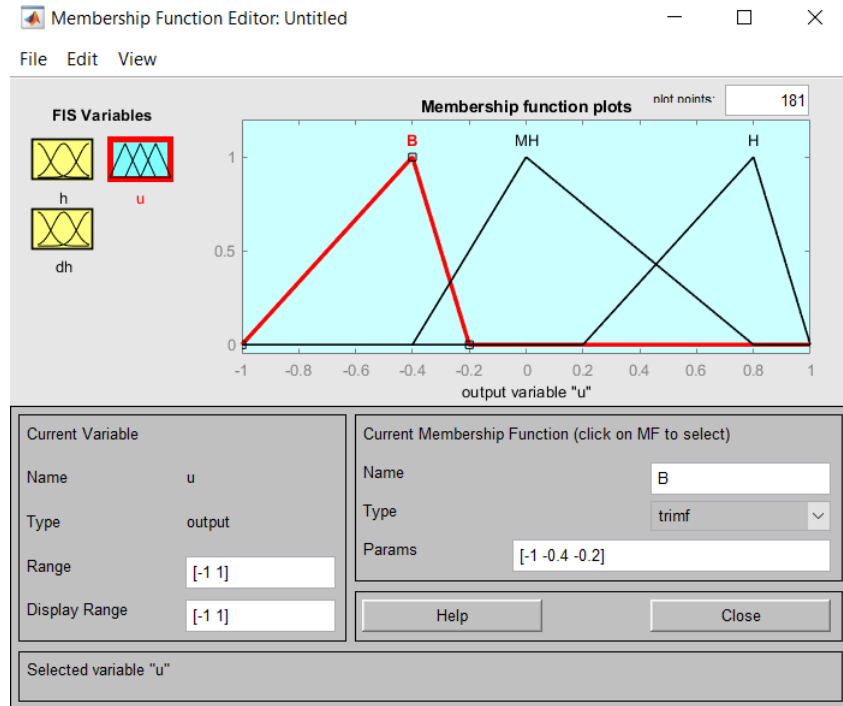


FIGURE 4.17 – Les degrés d'appartenance des sous-ensembles flous du paramètre de la sortie u .

(b) Les règles : paramétrage / activation des règles

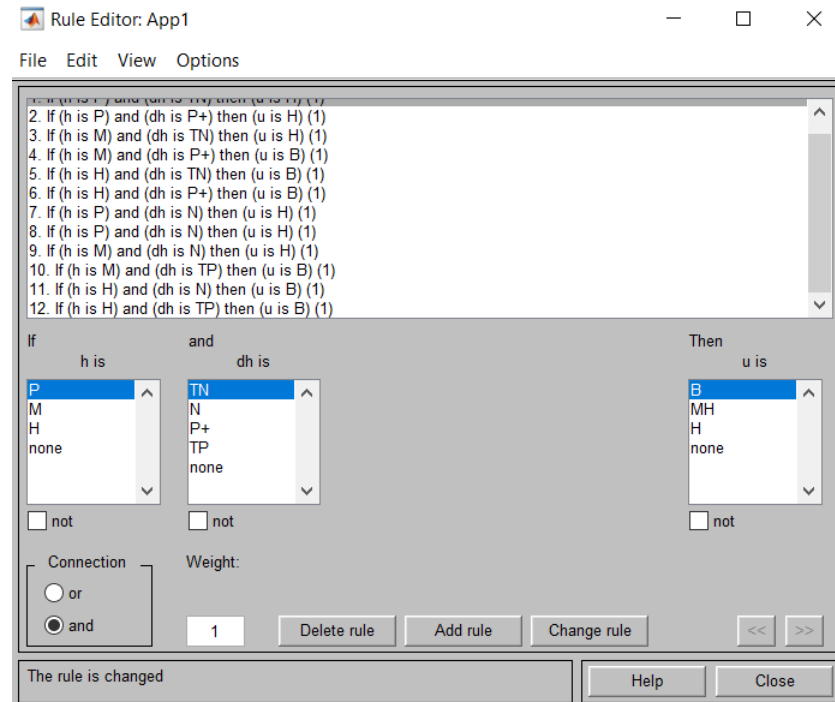


FIGURE 4.18 – Paramétrage des règles et des relations logiques.

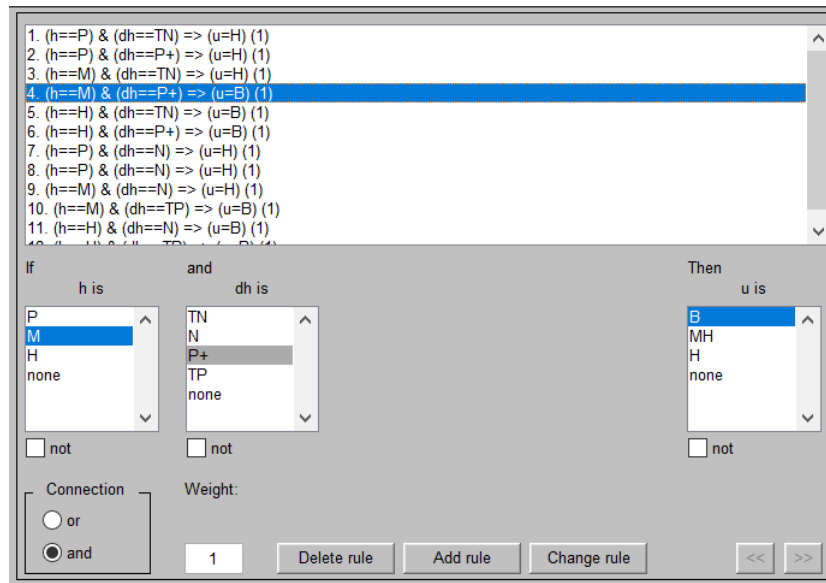


FIGURE 4.19 – Règles floues en affichage symbolique.

(c) Inférence et défuzzification

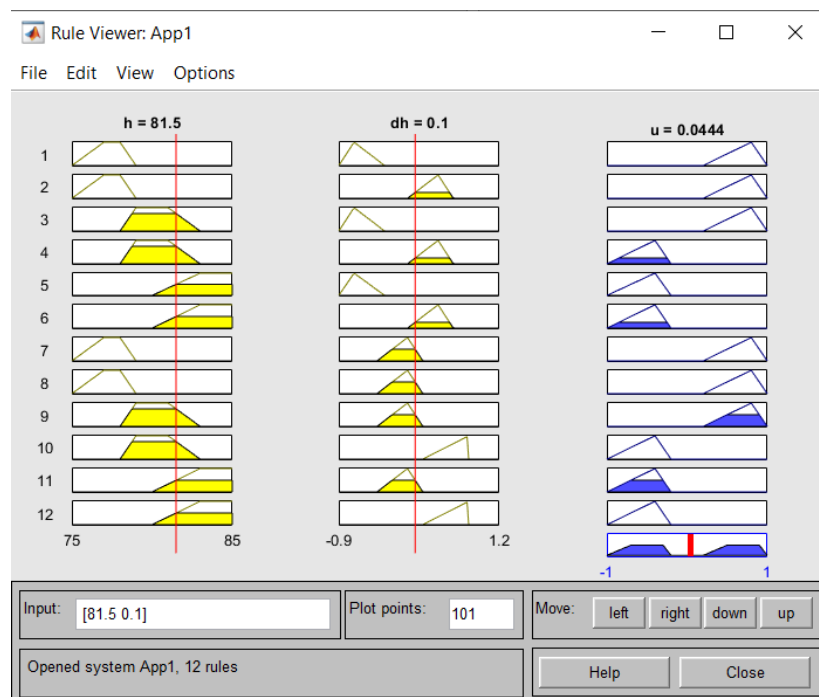


FIGURE 4.20 – Paramétrage des règles et relations logiques.

(d) Représentation 3D

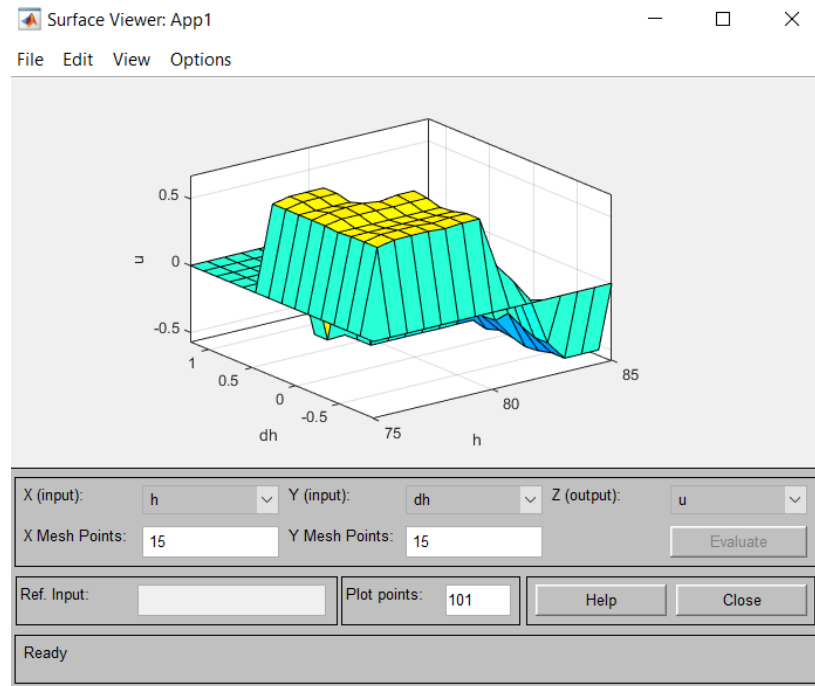


FIGURE 4.21 – Visualisation 3D des paramètres du contrôleur flou.

(e) Conclusion :

i. On remarque que :

$$u_{\text{calculé}} = 0.0416$$

$$u_{\text{Matlab}} = 0.0444$$

ii. Si nous imposons d'autres plages (même si elles sont très proches) à h et dh (idem si nous changeons les sous ensembles flous) nous aurons des valeurs, pour le paramètre (la commande) de la sortie u , qui sortent de la tolérance.

Exemple : $h = 80$ cm et $dh = 0.09$ cm/s , Alors : $u = 0.148 \gg 0.0416$

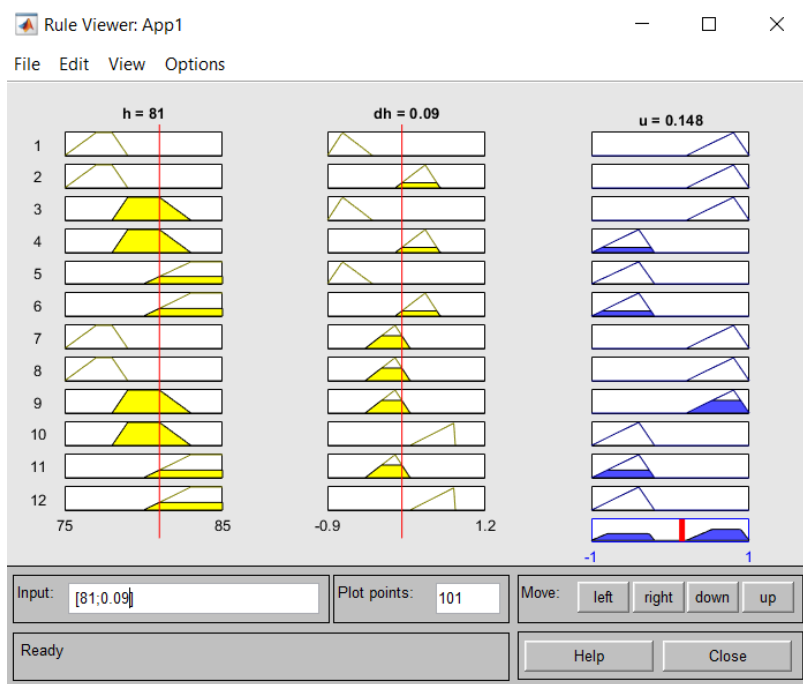


FIGURE 4.22 – Reparamétrage de h et dh dans les mêmes pages.

- iii. La modélisation via le logiciel Matlab permet de manipuler plusieurs pages de paramètres d'entrée h et dh de telle façon à optimiser le paramètre de sortie u .

Exemple : $h = 81$ cm et $dh = 0.14$ cm/s , Alors : $u = -0.00643 < 0.0416$

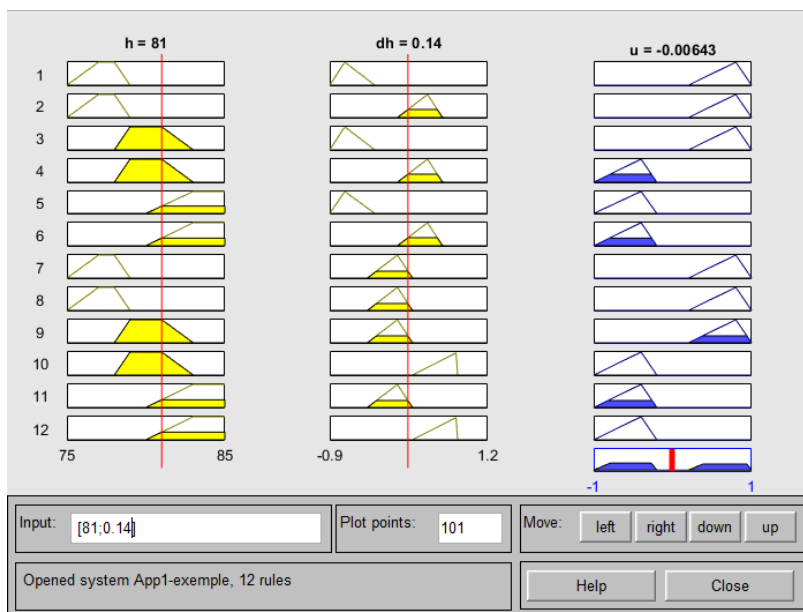


FIGURE 4.23 – Reparamétrage de dh hors les pages d'expertise.

Ce résultat reste valable, si l'expert le valide sans avoir de contraintes supplémentaires sur le déplacement dh

Dans le présent mémoire, nous avons élaboré une introduction et une étude de la théorie des sous-ensembles flous et de la logique floue et leur application selon des différents concepts soit par analogie à la théorie ensembliste classique ou soit par généralisation des opérations qui font appel à des fonctions plus pratiques à manipuler et à quantifier, qui satisfont certains axiomes et propriétés et à partir desquelles on peut construire des sous-ensembles flous des compléments, intersections ou des réunions flous. Ces fonctions qui s'appellent *t-normes* pour les intersections floues et *t-conormes* pour les réunions floues ont comme variables les fonctions d'appartenance des sous ensembles étudiés, et permettent d'étendre la notion de la théorie floue vers des horizons mathématiques plus robustes et plus déterminants.

Certes, la théorie étudiée par nos soins reste très peu devant les vastes étendus travaux réalisés dans ce domaine et qui sont diversifiés et bien poussés pour couvrir la majorité de Sciences Humaines en vertu d'en prospecter davantage des applications tenantes et veraces, mais notre travail modeste qu'il soit, a couvert une bonne panoplie basique de cette théorie dans une perspective d'améliorer la littérature correspondante et d'approfondir la recherche si une (des) opportunité(s) le permet(tent) dans l'avenir. L'importance du sujet de ce projet de fin d'études, peut avoir plusieurs aspects :

- C'est qu'il combine entre des grandes branches de la Mathématique telles que : L'Algèbre, l'Analyse, Statistiques...
- L'aspect structurel de cette théorie fait appel à l'usage de l'Informatique via des logiciels tels que : Matlab, Geogebra, les logiciels de composition de documents (latex, SWP...) , les tableurs...
- Il nous a permis de se lancer dans une recherche bibliographique assez riche et fondée par la variété de ses documents scientifiques (ouvrages, thèses, mémoires, articles...)

Nous avons aussi pu constater, durant toute la durée de l'établissement de ce mémoire, que la logique floue permet une réelle capitalisation du savoir-faire du terrain (pendant les phases d'inférence, et de la base et d'activation de règles), souvent recherchée pour exploiter le feed-back ou pour le démultiplier dans l'entreprise ou dans toute instance concernée.

Il convient de noter, en conclusion, que l'approche de cette logique permet aussi de modéliser divers problèmes, tant en mathématiques qu'en sciences humaines, qui revêtent un certain degré d'incertitude et d'imprécision. Puisque dans la réalité, toute activité humaine comporte soit de l'incertitude soit de l'imprécision, il s'avère donc important pour des recherches futures, de montrer comment la théorie des ensembles flous peut contribuer à la commande de différents comportements observés dans le monde réel.

Nous pouvons aussi relever que cette théorie qui rentre bel et bien dans la thématique de l'Analyse Mathématique et Applications et qui fait appel à la recherche continue et à la mise à jour, procure des avantages concurrentiels à l'industriel en quête d'optimisation technico-économique et sociale par usage de l'Intelligence Artificielle moteur de la renaissance technologique mondiale actuelle.

- [1] Sadok Sagaama : Contribution des sous-ensembles flous à l'aide à la décision (1977)
- [2] Didier Dubois & Henri Prade : Fuzzy Sets And Systems Theory And Applications (1978)
- [3] GEORGE J. KLIR & BO YUAN : FUZZY SETS AND FUZZY LOGIC Theory and Applications (1995).
- [4] Robert Fuller - Turku Centre for Computer Science : Fuzzy Reasoning and Fuzzy Optimization (1998).
- [5] F. Chevie & F. Guély : La logique floue – Cahier technique n° 191 (1998)
- [6] Josef TKADLEC - TRIANGULAR NORMS WITH CONTINUOUS DIAGONALS : Tatra Mt. Math. Publ. 16, 187–195 (1999)
- [7] Trends in Logic 8 - Erich Peter Klement, Radko Mesiar, Endre Pap - Triangular Norms-Springer (2000)
- [8] Guanrong Chen & Trung Tat Pham : Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems (2001)
- [9] L. Gacogne Logique Floue et Applications (2003)
- [10] Hung T. Nguyen & Vladik Kreinovich : Computing Degrees of Subsethood and Similarity for IntervalValued Fuzzy Sets : Fast Algorithms (2008)
- [11] M. SAMBASIVA RAO - Archivum Mathematicum (BRNO) - Tomus 48, 97-105 : δ - Ideals in Pseudo-Complemented-Distributive lattices (2012)
- [12] Franck Dernoncourt : Fuzzy logic (2013)
- [13] Dominique Longin : Raisonnement et incertitude - II – Ensembles flous et logique floue (2016)
- [14] Emerson Automation Solutions : MANUEL DE LA VANNE DE RÉGULATION - Cinquième édition (2019)
- [15] Malhis : annexe I sous-ensembles flous - Bibliothèque INSA Lyon - <http://csidoc.insa-lyon.fr>
- [16] L. Gacogne : Chapitre 4 - Contrôle flou : <http://web4.ensiie.fr>
- [17] Gabriel Cormier : GELE5313-Notes11 (Chapitre 11) – Yumpu - <https://www.yumpu.com>
- [18] Cours du Professeur S Chakraverty - Fuzzy Set Theory : https://www.youtube.com/watch?v=oWqXwCEfY78&list=PLjZ9ULh2Ff9FWvv-DiZHP6RN0kMr_4aW4
- [19] Cours du Professeur H.R.Tizhoosh - Machine Intelligence - Lecture 17 (Fuzzy Logic, Fuzzy Inference) : <https://www.youtube.com/watch?v=TReelsVxWxg&t=113s>
- [20] Cours de Matthieu Lescieux : <https://docplayer.fr/37315009-Fuzzy-logic-matthieu-lescieux.html>