



FACULTE DES SCIENCES BEN M'SICK
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

PROJET DE FIN D'ETUDE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER EN MATHEMATIQUES

Présenté par :

Imane DEHAJ

Analyse et contrôle d'un modèle mathématique : Application à l'épidémiologie

Soutenu le 06/06/2022, devant la commission d'examen :

Pr. H. FERJOUCHIA	Faculté des Sciences Ben M'sik	Présidente
Pr. A. ABTA	Faculté Polydisciplinaire de Safi	Examineur
Pr. Y. EL FOUTAYENI	Faculté des Sciences Ben M'sik	Examineur
Pr. K. ADNAOUI	Faculté des Sciences Ben M'sik	Examineur
Pr. M. IZID	Faculté des Sciences Ben M'sik	Examinatrice
Pr. I. AGMOUR	Faculté des Sciences Ben M'sik	Examinatrice
Pr. M. EI OURRECHI	Faculté des Sciences Ben M'sik	Examineur
Pr. O. ZAKARY	Faculté des Sciences Ben M'sik	Examineur
Pr. H. LAARABI	Faculté des Sciences Ben M'sik	Encadrant

Table des matières

Introduction	4
1 Modélisation mathématique	8
1.1 Construction de la théorie mathématique des épidémies	8
1.2 Principe de la construction d'un modèle mathématique en épidémiologie	10
1.3 Le modèle mathématique SIR (Susceptibles, Infectives, Removed) . . .	12
2 Contrôle optimal	15
2.1 Qu'est-ce que la théorie du contrôle?	15
2.2 Problème de contrôle optimal	16
2.3 Conditions nécessaires	17
2.4 Principe du maximum de Pontryagin	23
3 Contrôle optimal d'un modèle épidémique avec un taux d'incidence saturé	25
3.1 Contrôle optimal et Modélisation mathématique	25
3.2 Un modèle de contrôle optimal	26
3.3 Formulation d'un problème de contrôle optimal	28
3.4 Résolution du problème	30
3.4.1 L'existence d'une solution du système	31
3.4.2 L'existence d'un contrôle optimal	32
3.4.3 Caractérisation du contrôle optimal	33
3.5 Résolution et illustration numérique	36
3.5.1 La méthode GSS1 améliorée	36

3.5.2	Algorithme	38
3.5.3	Résultats numériques	38
4	Annexe	42
4.1	Résultats fondamentaux pour les équations différentielles	42
4.1.1	Equation différentielle	42
4.1.2	Problème de Cauchy	43
4.2	Résultats et outils de la théorie du contrôle optimal	44
4.3	Définitions et Préliminaires	46
	Résumé	48
	Bibliographie	48

Remerciement

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

Je remercie tout d'abord le tout puissant qui, par sa grâce m'a permis d'arriver au bout de mes efforts en me donnant la santé, la force, le courage et en me faisant entourer des merveilleuses personnes dont je tiens à remercier par ces mots :

Ma gratitude va à monsieur le professeur **LAARABI Hassan** qui m'a honoré de sa confiance. Il fut le premier à me faire découvrir et comprendre le sujet qui a guidé mon mémoire. Je le remercie pour le temps qu'il a consacré à m'apporter les outils méthodologiques indispensables à la conduite de ce travail. Merci de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Je tiens aussi à remercier vivement les examinateurs de ce mémoire, Mr.

ZAKARY Omar, Professeur à la Faculté des Sciences Ben M'sik, Mr.

ADNAOUI Khalid, Professeur à la Faculté des Sciences Ben M'sik, Mr. **M. El**

OURRACHI, Professeur à la Faculté des Sciences Ben M'sik, et Mr. **A. ABTA**, Professeur à la Faculté Polydisciplinaire de Safi, d'avoir accepté de juger ce travail.

Je tiens à remercier les Professeurs **AGMOUR Imane** et **IZID Malika** pour participer au jury en tant qu'examinatrices.

Je remercie distinctement le professeur **H. FERJOUCHIA**, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

J'associe à ces remerciements **Mr. EL FOUTAYENI Youssef**, Professeur et Coordinateur du Master AMA, pour l'énergie qu'il consacré durant ces deux

Remerciement

années et pour ses efforts visant à assurer l'organisation et le suivi pédagogique de cette formation, ainsi pour sa disponibilité. Je suis très honorée qu'il soit parmi les jurys de ma soutenance.

Aussi n'était-il pas concevable de réaliser ce mémoire de master sans remercier celui qui en fut le co-fondateur, Professeur **MARHRANI El miloudi** ancien coordinateur du Master AMA, l'un de ceux qui ont le plus fait pour ouvrir ce master. Ce mémoire me donne l'occasion de rendre un hommage tout particulier à ce professeur, dont les qualités pédagogiques et la distinction de l'esprit ont enrichi les connaissances de plusieurs générations. Ses initiatives foisonnaient et il se faisait un point d'honneur de mener jusqu'au bout les unes et les autres. Je lui suis également reconnaissante pour le temps conséquent qu'il nous a accordé, pour sa bonté, et sa modestie scrupuleuse. A tout le moins, ses étudiants, et tout particulièrement ceux de la faculté des sciences Ben m'sick, ont mesuré leur chance d'avoir pu bénéficier des leçons d'un maître de cette envergure morale et intellectuelle. Puissent ces lignes être l'expression de ma plus profonde reconnaissance.

L'enseignement de qualité dispensé par ce Master a également su nourrir mes réflexions et a représenté une profonde satisfaction intellectuelle, j'aimerais donc exprimer toute ma gratitude, envers tous **les professeurs de la faculté des sciences Ben m'sick** qui ne lésinent pas sur l'éducation et la transmission du savoir. Il n'est pas donné à n'importe qui d'enseigner. Cette faculté qu'ont **l'équipe pédagogique du département de Mathématiques et Informatique** en général et les enseignants de mathématiques en particulier mérite un grand respect. Merci pour votre humilité, merci pour votre dévotion.

Il m'est aussi agréable de m'acquitter d'une dette de reconnaissance envers mes chers parents **DEHAJ Elmostafa** et **CHAHBI Rachida**, et envers mes frères et soeurs : **Mohamed** et **Abdessamad**, **Nadia** et **Zineb**, ainsi que ma famille pour leurs soutien affectif, matériel et moral qu'ils m'ont apporté tout au long de mon existence.

La liste ne pouvant être exhaustive, je remercie toutes les personnes avec qui j'ai partagé mes études et qui, par leurs multiples conseils et soutiens, ont été chacune

Remerciement

une valeur supplémentaire à ce travail. A tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réussite de ce travail.

Introduction

Compte tenu de notre connectivité mondiale, les maladies infectieuses représentent aujourd’hui un problème majeur de santé publique. L’augmentation des résistances bactériennes, l’émergence de nouveaux pathogènes et la propagation rapide de l’épidémie ont suscité une attention et un intérêt accrus pour l’élaboration de plans d’intervention pour de tels scénarios. Tous les ordres de gouvernement et les responsables de la santé publique sont à la recherche de réponses pour identifier les meilleures stratégies d’intervention avant ce qui pourrait être un événement inévitable. Ce qui nécessite une mise en place des dispositifs de suivi et de prévention.

Des modèles mathématiques ont été utilisés pour explorer la dynamique des maladies depuis que Bernoulli a utilisé un modèle simple pour estimer la mortalité due à la variole et plaider pour les avantages de l’inoculation. La plupart des modèles mathématiques pour les maladies infectieuses utilisent une méthodologie basée sur les travaux formalisés par Anderson et May [30]. La première étape consiste à représenter les différents status de la maladie étudiée en divisant la population en plusieurs classes, appelées compartiments, qui représentent les différents stades de progression de la maladie. Tels que, SI (Susceptible, Infected), SIR (Susceptible, Infected, Removed), SEIR (Susceptible, Exposed, Infected, Removed), etc.

En utilisant ces compartiments et éventuellement d’autres si nécessaire, la distribution d’une maladie est représentée comme une série de sous-populations reliées par le flux d’un compartiment à l’autre dicté par la dynamique de la maladie.

L’apport des mathématiques se fait alors dans un premier temps par le biais de la modélisation qui constitue un véritable outil de santé publique ([18], [16], [17]). Elle permet de mettre à l’épreuve, sans perte de temps ni frais, les mesures de lutte qui sont envisagées : mesures préventives, isolement de malades, traitements, vaccina-

tions,... Le modèle n'est néanmoins pas la réalité et n'est pas supposé la reproduire en totalité. Il doit reproduire au mieux les caractéristiques du phénomène étudié en fonction des objectifs fixés pour le cadre de l'étude. La modélisation consiste alors à appliquer des outils mathématiques à un fragment de réalité. C'est transformer un besoin en équations, en essayant un maximum de rendre compte des contraintes relevées. L'étape de modélisation s'avère être la plus délicate, la plus longue et souvent la plus périlleuse. En effet, il faut réussir à bien comprendre le problème réel pour tenter de proposer un modèle adapté. La première tentative proposée ne répond que très rarement aux attentes, s'en suit alors plusieurs modifications, jusqu'à parvenir à un modèle qui regroupe et traduit un maximum de contraintes que le phénomène réel doit observer. Si cette étape est négligée ou omise, si les contraintes ne sont pas bien posées, on aboutit alors à une formulation mathématique qui ne correspond pas au problème. La résolution du problème mathématique fourni alors une solution non adaptée au problème concret. Enfin, si le problème est bien posé, l'étape suivante consiste alors à résoudre ce problème, c'est-à-dire à analyser le modèle dans le but de comprendre, de prédire et d'agir.

Lors de l'élaboration de plans de réponse aux épidémies, les décideurs sont souvent confrontés à des compromis dans le choix entre diverses options de traitement, la quarantaine et/ou les vaccins. Par exemple, le choléra, le virus du papillome humain et la grippe ont tous des options de traitement médical approuvées ainsi que des vaccins disponibles. Le défi consiste à trouver la réponse optimale équilibrant le traitement et la vaccination qui minimisera l'incidence et la mortalité liée à la maladie tout en tenant compte des coûts de chaque stratégie d'atténuation. La théorie du contrôle optimal [19] fournit un outil précieux pour commencer à évaluer les compromis entre ces stratégies.

On considère que la théorie moderne du contrôle optimal a commencé dans les années 50, avec la formulation du principe du maximum de Pontryagin, qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations. Dès lors, la théorie a connu un essor spectaculaire, ainsi que de nombreuses applications. Un grand nombre de méthodes différentes ont été développées pour calculer le contrôle optimal pour un modèle mathématique spécifique.

Les différents théorèmes dérivés du principe du maximum de Pontryagin permet le calcul du contrôle optimal pour un système de modèle d'équation différentielle or-

dinaire avec une contrainte donnée. Ces techniques sont puissantes lorsqu'elles sont appliquées à des modèles de maladies et peuvent fournir d'excellentes informations sur la meilleure voie pour réduire le fardeau de la maladie. Par exemple, avec un modèle mathématique donné pour une maladie, on peut calculer le meilleur calendrier de vaccination en équilibrant le coût du vaccin et le coût de la charge de morbidité.

Dans ce mémoire l'accent sera mis sur le contrôle optimal d'un modèle compartimental SIR, nous allons voir à travers un travail tiré de l'article "**Optimal control of an epidemic model with a saturated incidence rate**" [13], publié par : **Hassan Laarabi, El Houssine Labriji, Mostafa Rachik, et Abdelilah Kaddar**, comment nous pouvons encadrer la question de la gestion d'une maladie dans un problème de contrôle optimal nécessitant la maximisation/minimisation d'une fonction objective qui dépend des individus infectés (problèmes biologiques) et des coûts de contrôle (problèmes économiques), compte tenu de certaines conditions initiales.

Dans le premier chapitre, nous commençons par un aperçu historique dans lequel nous rappelons les idées générales qui ont conduit à la formulation des premiers modèles en dynamique de population. Nous verrons ensuite la base et le principe de la construction d'un modèle mathématique en épidémiologie. A la fin du chapitre, les éléments de base des modèles épidémiologiques SIR, composés de (Susceptible-Infected-Recovered), sont passés en revue, et un exemple simple est choisi pour illustrer ce type de modèle.

Une vue d'ensemble de la théorie du contrôle optimal, la définition du problème de contrôle optimal, et les conditions nécessaires basées sur le principe du maximum de Pontryagin seront introduites dans le deuxième chapitre. Nous énonçons par la suite, une version du théorème du maximum de Pontryagin afin de dégager directement les conditions nécessaires qui nous permettront de formuler le contrôle optimal.

Le troisième chapitre contient les résultats originaux tirés de l'article [13], nous rappelons que le but est de comprendre la démarche de modélisation, les résultats qui en découlent et leur apport dans des applications concrètes. Ce dernier chapitre sera donc partagé en 5 sections :

Section 1 : Nous formulons le modèle compartimental, proposé dans l'article [13], en utilisant des équations différentielles ordinaires.

Introduction

Section 2 : Un moyen de lutte, visant à limiter le nombre d'infection, est intégré aux modèle formulé précédemment.

Section 3 : Nous passons à la formulation d'un problème de contrôle optimal, pour lequel nous simulons différents scénarios.

Section 4 : Une étude du système est donnée par application directe des résultats classiques en théorie du contrôle, notamment le principe du maximum de Pontryagin.

Section 5 : Avec l'augmentation des variables et de la complexité, les problèmes de contrôle optimal ne peuvent plus être résolus analytiquement et des méthodes numériques sont nécessaires. A cet effet, dans cette section, une méthode développée par Gumel et al. [1] est présentée pour la résolution du problème.

Chapitre 1

Modélisation mathématique

Nous commençons ce travail par un bref historique de la modélisation épidémiologique. Il s'agit principalement d'un compte-rendu sélectif des travaux qui ont marqué l'évolution de l'épidémiologie mathématique depuis sa création, d'un aperçu des éléments de base sur lesquels s'appuie la construction des modèles épidémiologique et d'une description des modèles compartimentaux SIR.

1.1 Construction de la théorie mathématique des épidémies

Un modèle épidémiologique représente un système dynamique, capable de " refléter " les processus épidémiques, c'est une représentation simplifiée de la façon dont une infection se propage dans une population au fil du temps. Il vise trois objectifs principaux :

- Mieux comprendre les mécanismes par lesquels les maladies se propagent, ce qui implique l'importance d'une structure mathématique ;
- Prévoir l'évolution future de l'épidémie ;
- Comprendre comment contrôler la propagation de l'épidémie, par exemple réduire le nombre de susceptibles dans le modèle par la vaccination.

Les modèles mathématiques supposent une connaissance à priori des lois déterminant le phénomène étudié. Le principe de ces modèles réside tout d'abord, dans la description des différents liens existant entre la transmission de la maladie et

les autres facteurs (les facteurs de risque, l'environnement, etc.) sous forme d'un modèle (équations mathématiques, modèles d'individu, etc.). Ensuite, des données expérimentales ou des observations de terrain peuvent être utilisées pour estimer certains paramètres du modèle ou pour tester la validité des lois établies.

Les observations d'épidémies de maladies infectieuses ont conduit les épidémiologistes à la conclusion qu'elles présentent des caractéristiques régulières et qu'il doit y avoir des principes précis qui déterminent l'évolution des processus infectieux. On s'est donc efforcé d'exprimer en termes quantitatifs précis les changements temporels de la dynamique des infections et de formuler une théorie mathématique des épidémies. Un des principes généraux du mécanisme des épidémies a été établi en 1927 par Kermack & McKendrick [25] en termes mathématiques.

La théorie déterministe du processus épidémique proposée par Kermack & McKendrick et d'autres théories générales des épidémies, comme celles de Muench [14] en épidémiologie, ont permis la formulation d'une variété de modèles mathématiques généraux. Sur la base de ces théories générales, des modèles ont été proposés pour des maladies individuelles, telles que le paludisme [8], la schistosomiase, la rougeole [14], [26], d'autres maladies virales [22] et la tuberculose [15]. Ces modèles sont appelés épidémiologiques plutôt que mathématiques car ils ne sont pas basés sur des solutions strictement mathématiques de processus épidémiques mais plutôt sur des simulations de l'évolution naturelle et de la dynamique des maladies depuis divers états d'infection.

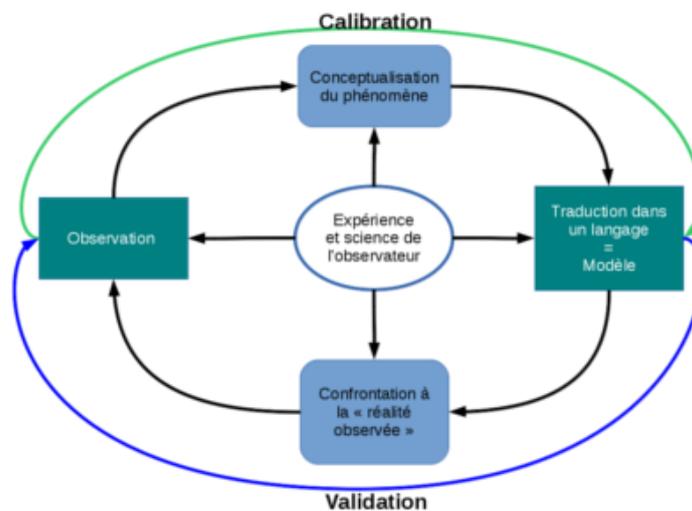
Il est jugé plus approprié de construire des modèles simples et utiles pouvant être utilisés dans la pratique de la santé publique pour la planification et l'évaluation des programmes de contrôle que de développer de grands systèmes complets, aussi parfaits soient-ils, qui n'ont qu'une utilisation pratique limitée. Il ne s'agit pas de nier l'importance scientifique de la modélisation, qui peut grandement contribuer à la théorie épidémiologique et accroître la compréhension des processus épidémiques, et donc finalement conduire à des améliorations dans la pratique de la santé publique.

1.2 Principe de la construction d'un modèle mathématique en épidémiologie

Pour construire un modèle, des données précises sont nécessaires sur les mesures quantitatives de divers facteurs et paramètres, tels que la période d'incubation, la durée de l'infectiosité et de la maladie, le degré et la durée de l'immunité. L'histoire naturelle des maladies infectieuses montre qu'il existe de nombreux états épidémiologiques, tels que la sensibilité, la résistance, la maladie et l'infectiosité. Par conséquent, la population est divisée en catégories d'individus qui appartiennent aux états épidémiologiques spécifiques et sont considérés comme des classes épidémiologiques.

Les taux de transition entre les différentes classes sont estimés à partir des données quantitatives disponibles sur l'historique de la maladie. Le taux de transition est simplement considéré comme la probabilité qu'une personne appartenant à une classe soit transférée dans une autre classe par unité de temps, par exemple une heure, un jour, une semaine ou une période encore plus longue.

Une fois la structure du modèle définie et les classes épidémiologiques et les taux de transition déterminés, la dynamique de la maladie dans la population peut être exprimée mathématiquement par un système d'équations différentielles. En général, le système n'est pas linéaire et est trop complexe pour être résolu analytiquement avec une rigueur mathématique. Mais aujourd'hui la grande capacité et les vitesses de calcul très élevées des ordinateurs électroniques modernes apportent une solution élégante au problème.



En définissant l'histoire naturelle de la maladie et les paramètres sur lesquelles le modèle est construit, il est nécessaire d'examiner de manière critique les données disponibles et parfois de corriger des idées communément acceptées mais erronées sur le mode de transmission, la fréquence d'infection et le mécanisme de transmission. Enfin, la validation du modèle est essentielle avant qu'il puisse être considéré comme réaliste et utilisé pour une simulation significative.

Un problème clé dans la modélisation de la dynamique d'évolution des maladies infectieuses est la représentation mathématique du mécanisme de transmission. La notion de "force d'infection" servira de fil conducteur à cette présentation. Le nombre de nouveaux cas par unité de temps est considéré comme le résultat d'une interaction entre le nombre de susceptibles, le nombre de personnes contagieuses et une « force d'infection » ($f.i.$) qui dépend du nombre de contacts effectifs entre la personne sensible et la source d'infection (personne infectieuse, animal ou milieu confiné) par unité de temps.

Par conséquent, le processus d'infection (S à I) est entraîné par

$$(f.i.)(t) = g(I(t)).$$

Ainsi, un taux typique, taux d'incidence, du processus d'infection est donné par

$$(\text{taux d'incidence})(t) = (f.i.)(t)S(t),$$

c'est le taux avec lequel l'infection se produit.

De nombreux auteurs se sont intéressés à la formulation de ce taux (voir par exemples [16], [34], [3], [23], et [33]). En se basant sur une loi de la chimie appelée la "loi d'action de masse", ils ont considéré des modèles épidémiques pour lesquels le taux d'infection est bilinéaire par rapport à I et à S ; c'est-à-dire qu'ils ont supposé que la force d'infection due à la population infectieuse est linéaire

$$(f.i.)(t) = kI(t).$$

En se référant à cette même loi, la fonction d'incidence a été choisi pour être non

linéaire, par exemple

$$g(I) = kI^p, \quad p > 0$$

$$g(I) = \frac{kI^p}{\alpha + \beta I^q}, \quad p, q > 0$$

et plusieurs autres formes ont été proposés, par exemples :

- Wilson et Worcester [4] ont été les premiers à considérer le taux d'infection plus général avec un facteur S^p .
- Severo [27] considère une forme plus générale

$$(\text{taux d'incidence})(t) = kI^p S^q, \quad \text{avec } q < 1.$$

- Un nouveau taux d'incidence a été développé par Capasso et Serio tout en étudiant la dynamique du choléra connu sous le nom de taux d'incidence saturé

$$(\text{taux d'incidence})(t) = \frac{kSI}{1 + kI}.$$

- Une autre forme du taux d'incidence saturé est donné par

$$(\text{taux d'incidence})(t) = \frac{kSI}{1 + kS}.$$

1.3 Le modèle mathématique SIR (Susceptibles, Infectives, Removed)

Dans la littérature associée à la modélisation mathématique d'épidémie, les modèles les plus connus sont les modèles compartimentaux. Dans ce travail nous nous intéressons à ce type de modèles, plus précisément le modèle SIR, car ils sont très largement utilisés.



Le modèle est composé principalement de trois compartiments comme le montre la figure ci-dessus.

Trois populations à définir :

S : la classe des susceptibles, c'est-à-dire les individus capables de contracter la maladie et de devenir eux-mêmes infectieux ;

I : la classe des infectieux, c'est-à-dire les individus capables de transmettre la maladie aux susceptibles ;

R : la classe des individus retirés, c'est-à-dire les individus qui, ayant contracté la maladie, sont décédés ou, s'ils sont guéris, sont immunisés de façon permanente, ou ont été isolés, ne pouvant donc plus transmettre la maladie.

Un modèle basé sur ces trois compartiments est généralement appelé modèle SIR. Une formulation mathématique, parmi plusieurs autres, de ces modèles est donnée par les trois équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta I(t)S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta I(t)S(t) - \gamma I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

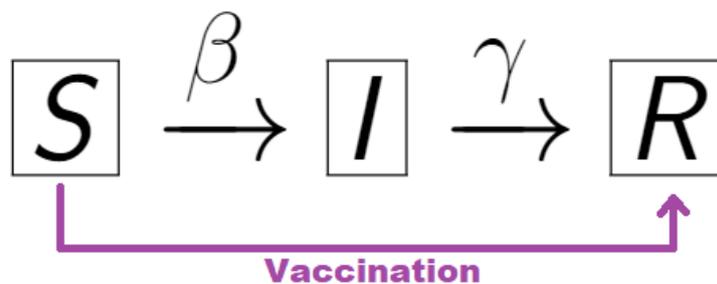
Avec N : la population totale, $N = S(t) + I(t) + R(t)$ et $S(0) = S_0 > 0$, $R(0) = R_0 > 0$, $I(0) = I_0 > 0$.

Ici, β représente le taux de transmission, c'est à dire le taux de personnes saines qui deviennent infectées et γ le taux de guérison, c'est à dire le taux de personnes infectées qui deviennent retirées.

Les dérivées $\frac{d}{dt}$ permettent de connaître la variation (c'est à dire si c'est croissant ou décroissant) des fonctions S , I et R en fonction du temps t , afin d'en décrire l'évolution au cours du temps. Le terme $S(t)I(t)$ représente le nombre de contacts entre des personnes saines et des personnes infectées. β étant le taux de transmission, il y a dès lors $\beta S(t)I(t)$ personnes nouvellement infectées. Celles-ci se soustraient des personnes saines, et s'ajoutent aux personnes infectées. De même, parmi les personnes infectées, certaines vont guérir : γ étant le taux de guérison, il a $\gamma I(t)$ personnes nouvellement guéries qui s'enlèvent des personnes infectées et s'ajoutent aux personnes retirées.

Ce modèle classique a été proposé en 1927 par les deux chercheurs : W.O. Kermack e A.G. McKendrick [25], leur méthode est toujours considérée comme valide, elle est largement utilisée dans des travaux de recherches d'actualité. A l'époque, l'objectif des deux chercheurs était de comprendre pourquoi la grande pandémie de grippe espagnole de 1918 n'avait pas infecté toute la population.

Ce modèle peut paraître simple, trop simple même, mais il est efficace : il a aidé à la politique sanitaire de vaccination contre la variole au début du XXe siècle. Les personnes saines vaccinées deviennent en effet directement retirées, et à terme l'épidémie s'arrête.



Or, une politique de vaccination visant à vacciner 100% de la population est quasiment impossible : il faut donc trouver le bon équilibre pour vacciner une partie de la population assez importante pour ralentir, puis arrêter l'épidémie. C'est ce qu'a permis le modèle SIR.

Notons que le modèle (1.1) contient les caractéristiques de base d'un système épidémique général, il est considéré comme un point de départ c.à.d dans cette même classe d'autres modèles peuvent être introduits.

Chapitre 2

Contrôle optimal

Dans ce chapitre, nous donnons un arrière-plan historique de la théorie du contrôle optimal, nous définissons ce qu'est un problème de contrôle optimal, et nous évoquons la principale technique de résolution de tel problème, qui consiste à vérifier un ensemble de conditions nécessaires que le contrôle et le système adjoint doivent remplir. Ces conditions nécessaires sont données par le principe du maximum de Pontryagin que nous allons énoncer à la fin du chapitre.

2.1 Qu'est-ce que la théorie du contrôle ?

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Pour de tels systèmes, de la forme $x'(t) = g(t, x(t), u(t))$, où $x(t)$ est l'état et $u(t)$ est le contrôle, vérifiant éventuellement certaines contraintes, le but est de déterminer une solution permettant d'amener le système d'un état initial à un certain état final, en minimisant un critère d'optimisation appelé le coût, on parle alors de problème de contrôle optimal.

Historiquement, le contrôle optimal est une extension du calcul des variations. Au XVIIe siècle, on trouve les premiers résultats formels du calcul des variations. Johann Bernoulli a défié d'autres mathématiciens contemporains célèbres tels que Newton, Leibniz, Jacob Bernoulli, L'Hôpital et von Tschirnhaus avec le problème de la brachistochrone : si un petit objet se déplace sous l'influence de la gravité, quelle

partie entre deux points fixes permet faire le voyage dans les plus brefs délais ?"

D'autres problèmes spécifiques ont été résolus et une théorie mathématique générale a été développée par Euler et Lagrange. La généralisation du calcul des variations à la théorie du contrôle optimal a été fortement motivée par des applications militaires et s'est développée rapidement depuis 1950. La percée décisive a été réalisée par le mathématicien russe Lev S. Pontryagin (1908-1988) et ses collaborateurs (V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidz et E. F. Misshchenko) avec la formulation et la démonstration du principe du maximum de Pontryagin. Ce principe a fourni à la recherche des conditions appropriées pour des problèmes d'optimisation avec des équations différentielles comme contraintes.

2.2 Problème de contrôle optimal

Un problème de contrôle optimal typique nécessite un indice de performance ou un coût fonctionnel ($J[x(t); u(t)]$), un ensemble de variables d'état ($x(t) \in X$), et un ensemble de variables de contrôle ($u(t) \in U$), avec $t_0 \leq t \leq t_f$. La variable d'état satisfait une équation différentielle qui dépend de la variable de contrôle :

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)). \quad (2.1)$$

L'objectif principal consiste à trouver un contrôle continu par morceaux $u(t)$ et la variable d'état associée $x(t)$ pour maximiser une fonction objectif donnée, c'est-à-dire.,

$$\max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt + \Phi(x(t_1)),$$

$$\text{associé à } x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.2)$$

$$a \leq u(t) \leq b,$$

où a, b sont des constantes réelles fixes et $a < b$.

Un tel contrôle de maximisation est appelé contrôle optimal. Pour nos besoins, f et g seront toujours des fonctions continuellement différentiables (par rapport aux trois variables). Ainsi, comme la ou les commandes seront toujours continues par morceaux, les états associés seront toujours différentiables par morceaux.

La principale technique pour un tel problème de contrôle optimal est de résoudre un ensemble de "conditions nécessaires" qu'un contrôle optimal et l'état correspondant doivent satisfaire. Pour l'instant, dérivons les conditions nécessaires.

2.3 Conditions nécessaires

Les conditions nécessaires [31] que nous dérivons ont été développées par Pontryagin et ses collaborateurs à Moscou dans les années 1950 [24]. Pontryagin a introduit l'idée de fonctions "adjointes" pour ajouter l'équation différentielle à la fonction objective. Les fonctions adjointes ont un objectif similaire à celui des multiplicateurs de Lagrange dans le calcul multivarié, qui ajoutent des contraintes à la fonction de plusieurs variables à maximiser ou à minimiser. Ainsi, nous commençons par trouver les conditions appropriées que la fonction adjointe doit satisfaire. Ensuite, nous dériverons une caractérisation du contrôle optimal en termes d'état optimal et d'adjoint correspondant.

Soit $J(u)$ la valeur de la fonction objective au contrôle u , où $x = x(u)$ est l'état associé, à savoir,

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt + \Phi(x(t_1)). \quad (2.3)$$

Supposons qu'il existe un contrôle optimal continu par morceaux et que u^* soit un tel contrôle, avec x^* est l'état correspondant. C'est-à-dire $J(u) \leq J(u^*) < \infty$ pour tout contrôle u .

Soit u^* , x^* un couple optimal. Soit $h(t)$ une fonction continue par morceaux telle qu'il existe une constante positive ε_0 , telle que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $u^\varepsilon(t) = u^*(t) + \varepsilon h(t)$ est admissible, c'est-à-dire que

$$a \leq u^\varepsilon(t) \leq b \text{ pour tout } t,$$

où $u^\varepsilon(t) = u^*(t) + \varepsilon h(t)$ est un autre contrôle continu par morceaux.

En raison des bornes sur les contrôles, la dérivée de la fonction objective peut ne pas être nulle au contrôle optimal, puisque u^* peut être aux bornes (extrémités de son aire de répartition) à certains points du temps t ; nous ne pouvons connaître que le signe de cette dérivée.

Pour calculer ce signe, nous restreignons également le signe du paramètre ε . Soit

$x^\varepsilon(t)$ la variable d'état correspondante pour chaque $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, à savoir, x^ε satisfait

$$\frac{d}{dt}x^\varepsilon(t) = g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)), \quad (2.4)$$

où u^ε est continue.

Puisque toutes les trajectoires commencent à la même position, nous prenons $x^\varepsilon(t_0) = x_0$. On voit facilement que $u^\varepsilon(t) \rightarrow u^*(t)$ pour tout t quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

De plus, pour tout t

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} u^\varepsilon(t) \right|_{\varepsilon=0^+} = h(t).$$

En fait, quelque chose de similaire est vrai pour x^ε . En raison des hypothèses faites sur g , il s'ensuit que

$$x^\varepsilon(t) \rightarrow x^*(t)$$

pour chaque t fixé. De plus, la dérivée

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x^\varepsilon(t) \right|_{\varepsilon=0^+}$$

existe pour tout t . La valeur réelle de la quantité s'avérera sans importance. Il nous suffit de savoir qu'elle existe.

La fonction objective en u^ε est

$$J(u^\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) dt + \Phi(x^\varepsilon(t_1)). \quad (2.5)$$

Nous sommes maintenant prêts à introduire la fonction ou variable adjointe λ . Soit $\lambda : t \rightarrow \lambda(t)$ une fonction différentiable par morceaux sur $[t_0, t_1]$

Par le Théorème Fondamental du Calcul,

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [\lambda(t)x^\varepsilon(t)] dt = \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) - \lambda(t_0)x^\varepsilon(t_0),$$

ce qui implique

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [\lambda(t)x^\varepsilon(t)] dt + \lambda(t_0)x^\varepsilon(t_0) - \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) = 0.$$

L'ajout de cette expression nulle à notre $J(u^\varepsilon)$ donne

$$\begin{aligned} J(u^\varepsilon) &= \int_{t_0}^{t_1} \left[f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \frac{d}{dt} [\lambda(t)x^\varepsilon(t)] \right] dt \\ &\quad + \lambda(t_0)x^\varepsilon(t_0) - \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) + \Phi(x^\varepsilon(t_1)) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \lambda'(t)x^\varepsilon(t) + \lambda(t)g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))] dt \\ &\quad + \lambda(t_0)x^\varepsilon(t_0) - \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) + \Phi(x^\varepsilon(t_1)) \end{aligned}$$

ici nous avons utilisé la règle du produit et le fait que $\frac{d}{dt}x^\varepsilon = g(t, x^\varepsilon, u^\varepsilon)$ partout sauf en un nombre fini de points. Puisque u^* est un maximum de J ,

$$0 \geq \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(u^\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0^+} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{J(u^\varepsilon) - J(u^*)}{\varepsilon}.$$

Remarquons que, la constante ε a été choisie pour être positive, donc la limite ne peut être prise que d'un côté. Le numérateur est clairement négatif, car u^* est maximal. Ce qui donne l'inégalité montrée. Cependant, c'est tout ce dont nous aurons besoin.

Nous avons maintenant une limite d'une expression intégrale. Une version du théorème de Convergence Dominée de Lebesgue nous permet de déplacer la limite (et donc la dérivée) à l'intérieur de l'intégrale. Ceci est dû à la compacité de l'intervalle d'intégration et la différentiabilité par morceaux de l'intégrande.

Donc

$$\begin{aligned} 0 &\geq \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(u^\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0^+} \\ 0 &\geq \int_{t_0}^{t_1} \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [f(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + \lambda'(t)x^\varepsilon(t) + \lambda(t)g(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))] \right|_{\varepsilon=0^+} dt \\ &\quad - \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda(t_1)x^\varepsilon(t_1) \right|_{\varepsilon=0^+} + \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(x^\varepsilon(t_1)) \right|_{\varepsilon=0^+} \end{aligned}$$

En appliquant la règle de la chaîne à f et g , il s'ensuit

$$\begin{aligned}
 0 \geq \int_{t_0}^{t_1} \left[f_x \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + f_u \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \lambda'(t) \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \lambda(t) \left(g_x \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon} + g_u \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) \right] \Big|_{\varepsilon=0^+} dt \\
 - \lambda(t_1) \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t_1) \Big|_{\varepsilon=0^+} + \Phi'(x^\varepsilon(t_1)) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x^\varepsilon(t_1) \Big|_{\varepsilon=0^+}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

où les variables des termes f_x , f_u , g_x et g_u sont $(t, x^*(t), u^*(t))$.

En réarrangeant les termes dans (2.6), on obtient

$$\begin{aligned}
 0 \geq \int_{t_0}^{t_1} \left[(f_x + \lambda(t)g_x + \lambda'(t)) \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t) \Big|_{\varepsilon=0^+} + (f_u + \lambda(t)g_u) h(t) \right] dt \\
 - \lambda(t_1) \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t_1) \Big|_{\varepsilon=0^+} + \Phi'(x^\varepsilon(t_1)) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x^\varepsilon(t_1) \Big|_{\varepsilon=0^+}.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Nous voulons choisir la fonction adjointe pour simplifier (2.7) en faisant disparaître les coefficients de

$$\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t_1) \Big|_{\varepsilon=0^+}$$

Ainsi, nous choisissons la fonction adjointe $\lambda(t)$ qui satisfait

$$\lambda'(t) = - [f_x(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_x(t, x^*(t), u^*(t))] \quad (\text{équation adjointe}) \tag{2.8}$$

et la condition aux limites

$$\lambda(t_1) = \Phi'(x^*(t_1)) \quad (\text{condition de transversalité}). \tag{2.9}$$

Maintenant (2.7) se réduit à

$$0 \geq \int_{t_0}^{t_1} (f_u + \lambda g_u) h dt, \tag{2.10}$$

cette inégalité est vrai pour tout h comme décrit ci-dessus.

Soit s un point de continuité de u^* avec $a \leq u^*(s) < b$. Supposons que $f_u + \lambda g_u > 0$ en s . Comme u^* est continue en s , $f_u + \lambda g_u$ l'est aussi. Il existe donc un petit intervalle I , contenant s , sur lequel $f_u + \lambda g_u$ est strictement positif et $u^* < b$. Soit

$$M = \max \{u^*(t) : t \in I\} < b.$$

Définissons une fonction h particulière par

$$h(t) = \begin{cases} b - M & \text{si } t \in I, \\ 0 & \text{si } t \notin I. \end{cases}$$

Notons que $h > 0$ sur I . On voit facilement que $a \leq u^* + \varepsilon h \leq b$ pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. Mais,

$$\int_{t_0}^{t_1} (f_u + \lambda g_u) h dt = \int_I (f_u + \lambda g_u) h dt > 0$$

par choix de I et h . Ceci contredit (2.10) et implique $f_u + \lambda g_u \leq 0$ en s .

De même, soit s un point de continuité de u^* avec $a < u^*(s) \leq b$. Supposons que $f_u + \lambda g_u < 0$ en s . Comme précédemment, il existe un petit intervalle I , contenant s , sur lequel $f_u + \lambda g_u$ est strictement négatif et $u^* > a$. Soit

$$m = \min \{u^*(t) : t \in I\} > a$$

et définissons une fonction de variation par

$$h(t) = \begin{cases} a - m & \text{si } t \in I, \\ 0 & \text{si } t \notin I. \end{cases}$$

Alors, $a \leq u^* + \varepsilon h \leq b$ pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$. Mais,

$$\int_{t_0}^{t_1} (f_u + \lambda g_u) h dt = \int_I (f_u + \lambda g_u) h dt > 0,$$

ce qui contredit (2.10), alors $f_u + \lambda g_u \geq 0$ en s . De plus, cela est vraie pour tout points de continuité s . En résumé,

$$\begin{aligned} u^*(t) = a & \quad \text{implique} \quad f_u + \lambda g_u \leq 0 \text{ en } t, \\ a < u^*(t) < b & \quad \text{implique} \quad f_u + \lambda g_u = 0 \text{ en } t, \\ u^*(t) = b & \quad \text{implique} \quad f_u + \lambda g_u \geq 0 \text{ en } t. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Les conditions (2.11) sont équivalentes à

$$\begin{aligned} f_u + \lambda g_u \leq 0 \text{ en } t, & \quad \text{implique} \quad u^*(t) = a, \\ f_u + \lambda g_u = 0 \text{ en } t, & \quad \text{implique} \quad a < u^*(t) < b, \\ f_u + \lambda g_u \geq 0 \text{ en } t. & \quad \text{implique} \quad u^*(t) = b. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Ceci est vrai pour tout point de continuité t de u^* . Comme ils ne sont pas pertinents pour la fonction objective et l'équation d'état, on néglige le reste des points. Ces équations forment un ensemble de conditions nécessaires qu'un contrôle optimal et l'état doit satisfaire. En pratique, on n'a pas besoin de redériver les équations précédentes de cette manière pour un problème particulier. En effet, nous pouvons générer les conditions nécessaires ci-dessus du hamiltonien H , qui est défini comme suit,

$$\begin{aligned} H(t, x, u, \lambda) &= f(t, x, u) + \lambda(t)g(t, x, u), \\ &= \text{intégrande} + \text{adjoint} * \text{RHS de ED.} \end{aligned}$$

Nous maximisons H par rapport à u en u^* , et les conditions nécessaires pour x^* et λ ci-dessus peuvent être écrites en fonction de l'Hamiltonien :

$$x'(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad x(t_0) = x_0, \quad (\text{la dynamique de l'équation d'état}),$$

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (\text{l'équation adjointe}),$$

$$\lambda(t_1) = \Phi'(x(t_1)), \quad (\text{condition de transversalité}).$$

Il résulte de la dérivation ci-dessus

$$\begin{aligned} u^* &= a && \text{si } \frac{\partial H}{\partial u} \leq 0 \text{ en } t, \\ a < u^* < b & && \text{si } \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \text{ en } t, \quad (\text{condition d'optimalité}) \quad (2.13) \\ u^* &= b && \text{si } \frac{\partial H}{\partial u} \geq 0 \text{ en } t. \end{aligned}$$

Ces conclusions peuvent être étendues à une version du principe du maximum de Pontryagin. Cependant, la preuve de ce théorème est assez technique et difficile, et nous l'omettons ici. Nous renvoyons le lecteur intéressé au texte original de Pontryagin [24] et au livre de Clarke pour les extensions [5].

Nous sommes maintenant prêts à énoncer le principe du maximum de Pontryagin (PMP).

2.4 Principe du maximum de Pontryagin

Lev Semionovitch Pontriaguine né le 3 septembre 1908 à Moscou et mort le 3 mai 1988, est un mathématicien soviétique. Il a fait des découvertes majeures dans plusieurs domaines des mathématiques, en particulier en topologie et en Théorie du contrôle. Il est communément admis que le principe du maximum a été prouvé

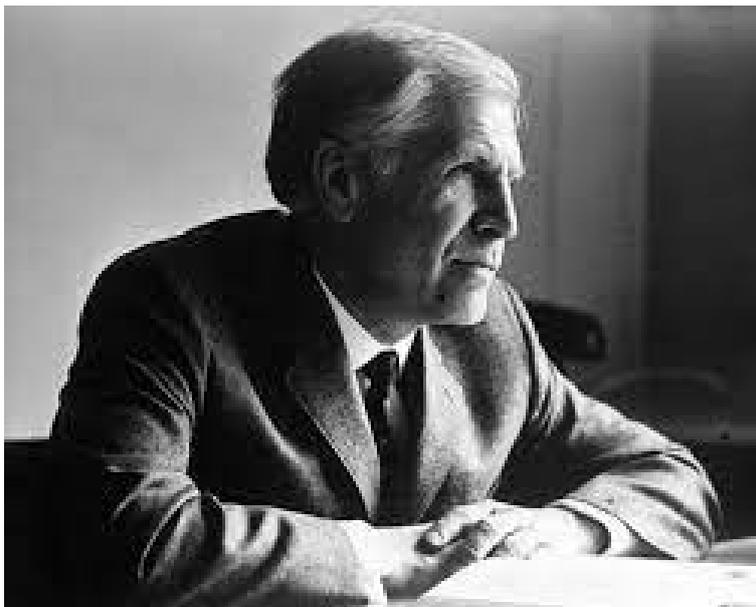


FIGURE 2.1 – Lev Semionovitch Pontriaguine

pour la première fois par L. Pontryagin et ses collaborateurs à la fin des années 1950. Depuis lors, la théorie du contrôle optimal a joué un rôle important non seulement dans l'optimisation dynamique, mais aussi dans le contrôle et l'ingénierie des systèmes.

Théorème 2.4.1 (Principe du maximum de Pontryagin). *Si $u^*(t)$ et $x^*(t)$ sont optimaux pour le problème (2.2), alors il existe une variable adjointe dérivable par morceaux $\lambda(t)$ telle que*

$$H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

pour tout contrôle $a \leq u \leq b$ et à chaque instant t , où l'hamiltonien H est

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda(t)g(t, x, u),$$

et

$$\begin{aligned}\lambda'(t) &= -\frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))}{\partial x}, \\ \lambda(t_1) &= \Phi'(x(t_1)).\end{aligned}$$

Remarque. *Le principe du maximum de Pontryagin est un résultat constructif dans le sens où il permet de déterminer explicitement les expressions des contrôles leur donnant naissance.*

La réciproque du principe est fautive en général : on ne peut s'assurer que toutes les extrémals obtenues soient nécessairement optimales.

En l'absence de contraintes sur le contrôle, c'est à dire $U = \mathbb{R}^m$ alors la condition de maximisation devient : $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$.

Proposition 2.4.2. *si $(x^*(t), u^*(t))$ est une solution optimale d'un problème de contrôle optimal, alors il existe une fonction vectorielle non triviale $\lambda(t)$ telle que :*

$$H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

pour tout contrôle u à chaque instant t , où H est l'hamiltonien défini précédemment et

$$x'(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad x(t_0) = x_0, \quad (\text{la dynamique de l'équation d'état}),$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad (\text{Condition d'optimalité}),$$

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (\text{l'équation adjointe}),$$

$$\lambda(t_1) = \Phi'(x(t_1)), \quad (\text{condition de transversalité}).$$

Chapitre 3

Contrôle optimal d'un modèle épidémique avec un taux d'incidence saturé

Ce chapitre passe en revue la littérature disponible sur un modèle mathématique qui utilisent la théorie du contrôle optimal pour déduire les stratégies optimales visant à limiter la propagation d'une maladie infectieuse. L'objectif est donc de réduire le nombre d'individus sensibles et infectés et d'augmenter le nombre d'individus récupérés.

3.1 Contrôle optimal et Modélisation mathématique

La théorie du contrôle optimal est un autre domaine des mathématiques largement utilisé pour contrôler la propagation des maladies infectieuses. C'est un outil mathématique puissant qui peut être utilisé pour prendre des décisions impliquant une situation biologique complexe. Il est souvent utilisé dans le contrôle de la propagation de la plupart des maladies pour lesquelles un vaccin ou un traitement est disponible.

Chapitre 3. Contrôle optimal d'un modèle épidémique avec un taux d'incidence saturé

Par exemple, Gaff et Schaefer [12] ont appliqué la théorie du contrôle optimal à un ensemble de modèles épidémiologiques dans leur tentative de trouver la stratégie de contrôle la plus efficace pour minimiser le nombre d'individus infectés au cours d'une épidémie en utilisant à la fois le traitement et la vaccination. Fister et Donnelly [21] ont également utilisé la théorie du contrôle optimal pour déterminer les conditions d'élimination des cellules tumorales chez un individu sous traitement contre le cancer. Zaman et al. [10] ont fait un travail apparenté à celui de Gaff et Schaefer et ils se sont concentrés sur un modèle SIR utilisant uniquement la vaccination comme contrôle.

La modélisation mathématique des maladies infectieuses a montré que des combinaisons d'isolement, de quarantaine, de vaccin et de traitement sont souvent nécessaires pour éliminer la plupart des maladies infectieuses. Cependant, s'ils ne sont pas administrés au bon moment et dans la bonne quantité, l'élimination de la maladie restera une tâche difficile. La théorie du contrôle optimal s'est avérée être un outil efficace pour comprendre les moyens de réduire la propagation des maladies infectieuses en concevant les stratégies d'intervention optimales contre les maladies. La méthode consiste à minimiser le coût de l'infection ou le coût de mise en œuvre du contrôle, ou les deux.

3.2 Un modèle de contrôle optimal

On suppose que la dynamique de population est décrite par un modèle mathématique compartimental SIR avec un taux d'incidence saturé modifié (Liu, Hethcote [37] et d'autres ont publié plusieurs études examinant la nécessité et l'effet d'autres mesures d'incidence). Le modèle SIR pour la population humaine fait apparaître trois catégories, ceux qui sont sains et susceptibles de devenir infectés S , ceux qui sont infectés I et ceux qui sont déjà immunisés R . On a donc $N = S + I + R$.

Déterminons à présent la dynamique des classes S , I , R :

La variation des humains susceptibles est due, d'une part, à l'infection de ceux-ci,

$$\frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)},$$

où β est le taux de contacts infectieux entre humains susceptibles et infectieux (le

Chapitre 3. Contrôle optimal d'un modèle épidémique avec un taux d'incidence saturé

taux de transmission), et α_1 et α_2 sont les paramètres qui mesurent l'effet inhibiteur.

Notons que ce taux à également été utilisé, par exemples dans [2], [28], et dans [32]. C'est un taux d'incidence saturé modifié (saturé d'individus sensibles et infectés) $\frac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha_1 S(t)+\alpha_2 I(t)}$, qui comprend les trois formes :

$$— \beta SI \text{ (si } \alpha_1 = \alpha_2 = 0),$$

$$— \frac{\beta SI}{1+\alpha_1 S} \text{ (si } \alpha_2 = 0),$$

$$— \frac{\beta SI}{1+\alpha_2 I} \text{ (si } \alpha_1 = 0).$$

D'autre part la population des susceptibles a une croissance de

$$A - \mu S(t),$$

où A est le taux de croissance de la population humaine et μ le taux de mortalité naturelle de la population humaine.

On obtient alors :

$$\dot{S}(t) = A - \mu S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)},$$

La variation des infectés est due à la contraction de la maladie par les susceptibles,

$$\frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)}$$

l'immunisation des infectés

$$-\gamma I(t),$$

où γ est le taux de transfert des infectés vers les immunisés, et à la mort naturelle de ceux-ci,

$$-\mu I(t)$$

et aussi à la mortalité due à la maladie

$$-\alpha I(t),$$

où α est le taux de mortalité due à la maladie.

On obtient alors :

$$\dot{I}(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)} - (\mu + \alpha + \gamma)I(t),$$

Enfin la variation des immunisés est due, d'une part, à l'immunisation des infectés $\gamma I(t)$, et d'autre part à la mort de ceux-ci, $-\mu R(t)$.

D'où :

$$\dot{R}(t) = \gamma I(t) - \mu R(t).$$

On obtient donc le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= A - \mu S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)}, & S(0) &= S_0 \geq 0, \\ \dot{I}(t) &= \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)} - (\mu + \alpha + \gamma)I(t), & I(0) &= I_0 \geq 0, \\ \dot{R}(t) &= \gamma I(t) - \mu R(t), & R(0) &= R_0 \geq 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

Etant donné que ce système décrit l'évolution des densités de population, les conditions initiales pour S , I et R seront prises dans $(\mathbb{R}_+)^3$.

3.3 Formulation d'un problème de contrôle optimal

Comme nous l'avons énoncé précédemment, l'étude de ces systèmes nous amène naturellement à aborder les différents moyens de lutte permettant de réduire l'impact d'une épidémie. Nous allons traduire tout cela par la formulation d'un problème de contrôle optimal développé par **Hassan Laarabi, El Houssine Labriji, Mostafa Rachik**, et **Abdelilah Kaddar** dans l'article [\[13\]](#).

L'approche utilisée, se base sur l'utilisation d'un moyen de lutte qui peut limiter l'impact de la maladie. Ils ont intégré au modèle [\(3.1\)](#), la variable de contrôle $u(t) \in U_{ad}$ qui désigne le pourcentage d'individus sensibles vaccinés par unité de temps, où

$$U_{ad} = \{u \mid u(t) \text{ est mesurable, } 0 \leq u(t) \leq u_{\max} < \infty, t \in [0, t_{end}]\}$$

indique un ensemble de contrôles admissibles. Dans ce problème optimal, on

Chapitre 3. Contrôle optimal d'un modèle épidémique avec un taux d'incidence saturé

suppose une restriction sur la variable de contrôle telle que $0 \leq u(t) \leq u_{\max}$, car il est impossible de vacciner tous les individus sensibles en une seule fois. La signification physique de la variable de contrôle dans ce problème est que si les niveaux bas du nombre d'individus infectés et susceptibles sont atteints, nous obtenons davantage d'individus récupérés. En l'absence de vaccination, le nombre d'individus infectés et sensibles augmente tandis que le nombre d'individus guéris diminue. Le moment idéal pour les vaccinations peut ramener le nombre d'individus infectés à un petit niveau, le nombre d'individus sensibles recommence à se reconstituer et davantage d'individus se remettent de l'infection.

Notre problème de contrôle optimal se formule alors de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S}(t) = A - (\mu + u(t)) S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)}, \quad S(0) = S_0 \geq 0, \\ \dot{I}(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)} - (\mu + \alpha + \gamma)I(t), \quad I(0) = I_0 \geq 0, \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) - \mu R(t) + u(t) S(t), \quad R(0) = R_0 \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Au système [3.2](#), on associe un problème de contrôle optimal pour minimiser la fonction objective, fonction de coût, suivante :

$$J(u) = \int_0^{t_{\text{end}}} \left[A_1 S(t) + A_2 I(t) + \frac{1}{2} \tau u^2(t) \right] dt \quad (3.3)$$

Les deux premiers termes de la fonction objective représentent le bénéfice/le gain pour les populations $S(t)$ et $I(t)$ que nous souhaitons réduire. A_1 et A_2 sont des constantes positives pour maintenir un équilibre dans la taille de $S(t)$ et $I(t)$, respectivement. Naturellement, chaque contrôle entraîne des coûts. Malheureusement, nous ne disposons pas de bonnes données sur les coûts associés au contrôle de la vaccination. Par conséquent, nous nous concentrons sur l'utilisation du coût "relatif" pour le contrôle.

Comme il est d'usage (voir par exemple [\[11\]](#)), les coûts sont supposés sous forme de fonctions quadratiques $(1/2)\tau u^2$, où τ est un paramètre de poids positif qui est associé au contrôle $u(t)$, et le carré de la variable de contrôle reflète la gravité des effets secondaires de la vaccination. En effet, les coûts sont rarement linéaires, et souvent sont présentés comme étant de fonctions non linéaires du contrôle. Il existe

d'autres types de fonctions dans la littérature [9]. Comme toute vaccination demande un certain effort, le plus naturel est alors de considérer des fonctions quadratiques. Celles-ci permettent aussi de faire l'analogie avec l'énergie qui est ici dépensée pour toutes ces mesures.

L'objectif est de minimiser les individus infectés et sensibles et, par conséquent, de maximiser le nombre total d'individus récupérés (les individus vaccinés sont ajoutés directement au compartiment récupéré), en utilisant une variable de contrôle minimale $u(t)$. Les individus sensibles induisent un pourcentage de contrôle de la vaccination $u(t)$ pour se protéger contre une éventuelle infection à une unité de temps. A noter qu'un tel vaccin protège contre la primo-infection. Par conséquent, nous nous attendons à ce que le vaccin soit efficace en cas de réinfection. Ainsi, les individus récupérés, qui sont à nouveau sensibles, doivent fournir le même pourcentage de contrôle de vaccination $u(t)$ pour se protéger d'une éventuelle réinfection.

On cherche alors le contrôle u^* qui minimise le coût :

$$J(u^*) = \min_{u \in U_{ad}} J(u), \quad (3.4)$$

où

$$U_{ad} = \{u \mid u(t) \text{ est mesurable, } 0 \leq u(t) \leq u_{\max} < \infty, t \in [0, t_{end}]\}.$$

3.4 Résolution du problème

Le problème de contrôle optimal est alors résolu lorsque nous déterminons $u^* \in U_{ad}$ qui minimise la fonction (3.4). Pour cela le travail à effectuer consiste à :

1. Montrer l'existence d'une solution du système.
2. Montrer l'existence d'un contrôle optimal.
3. Donner une caractérisation du contrôle optimal.
4. Obtenir des représentations numériques.

3.4.1 L'existence d'une solution du système

On considère un système de contrôle (3.2) avec des conditions initiales. Ensuite, nous réécrivons notre système (3.2) sous la forme suivante :

$$\phi_t = B\phi + F(\phi), \quad (3.5)$$

où

$$\phi = \begin{bmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -(u(t) + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu + \alpha + \gamma) & 0 \\ u(t) & \gamma & -\mu \end{bmatrix},$$

et

$$F(\phi) = \begin{bmatrix} A - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)} \\ \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha_1 S(t) + \alpha_2 I(t)} \\ 0 \end{bmatrix},$$

et ϕ_t désigne la dérivée de ϕ par rapport au temps t . L'équation (3.5) est un système non linéaire avec un coefficient borné.

Nous fixons

$$D(\phi) = B\phi + F(\phi),$$

$$\begin{aligned} & |F(\phi_1) - F(\phi_2)| \\ &= \left| A - \frac{\beta S_1 I_1}{1 + \alpha_1 S_1 + \alpha_2 I_1} - A + \frac{\beta S_2 I_2}{1 + \alpha_1 S_2 + \alpha_2 I_2} \right| + \left| \frac{\beta S_1 I_1}{1 + \alpha_1 S_1 + \alpha_2 I_1} - \frac{\beta S_2 I_2}{1 + \alpha_1 S_2 + \alpha_2 I_2} \right| \\ &= \left| \frac{\beta S_2 I_2 (1 + \alpha_1 S_1 + \alpha_2 I_1) - \beta S_1 I_1 (1 + \alpha_1 S_2 + \alpha_2 I_2)}{(1 + \alpha_1 S_1 + \alpha_2 I_1)(1 + \alpha_1 S_2 + \alpha_2 I_2)} \right| + \left| \frac{\beta S_2 I_2 (1 + \alpha_1 S_1 + \alpha_2 I_1) - \beta S_1 I_1 (1 + \alpha_1 S_2 + \alpha_2 I_2)}{(1 + \alpha_1 S_1 + \alpha_2 I_1)(1 + \alpha_1 S_2 + \alpha_2 I_2)} \right| \\ &= 2\beta \left| \frac{S_2 I_2 (1 + \alpha_1 S_1 + \alpha_2 I_1) - S_1 I_1 (1 + \alpha_1 S_2 + \alpha_2 I_2)}{(1 + \alpha_1 S_1 + \alpha_2 I_1)(1 + \alpha_1 S_2 + \alpha_2 I_2)} \right| \\ &\leq 2\beta |S_2 I_2 (1 + \alpha_1 S_1 + \alpha_2 I_1) - S_1 I_1 (1 + \alpha_1 S_2 + \alpha_2 I_2)| \\ &\leq 2\beta |S_2 I_2 + \alpha_1 S_1 S_2 I_2 + \alpha_2 S_2 I_1 I_2 - S_1 I_1 - \alpha_1 S_1 S_2 I_1 - \alpha_2 S_1 I_1 I_2| \\ &\leq 2\beta |\alpha_1 S_1 S_2 (I_2 - I_1) + \alpha_2 I_1 I_2 (S_2 - S_1) + S_2 I_2 - S_1 I_1| \\ &\leq 2\beta |\alpha_1 S_1 S_2 (I_2 - I_1) + \alpha_2 I_1 I_2 (S_2 - S_1) + S_2 (I_2 - I_1) + I_1 (S_2 - S_1)| \\ &\leq 2\beta (\alpha_1 S_1 S_2 |I_2 - I_1| + \alpha_2 I_1 I_2 |S_2 - S_1| + S_2 |I_2 - I_1| + I_1 |S_2 - S_1|) \\ &< 2\beta \left(\alpha_1 \left(\frac{A}{\mu}\right)^2 |I_2 - I_1| + \alpha_2 \left(\frac{A}{\mu}\right)^2 |S_2 - S_1| + \frac{A}{\mu} |I_2 - I_1| + \frac{A}{\mu} |S_2 - S_1| \right) \end{aligned}$$

$$\leq M (|S_2 - S_1| + |I_2 - I_1|),$$

où

$$M = 2\beta \max \left(\left(\alpha_1 \left(\frac{A}{\mu} \right)^2 + \frac{A}{\mu} \right); \left(\alpha_2 \left(\frac{A}{\mu} \right)^2 + \frac{A}{\mu} \right) \right).$$

Aussi, on obtient $|D(\phi_1) - D(\phi_2)| \leq V |\phi_1 - \phi_2|$, où $V = \max(M, \|B\|) < \infty$. Ainsi, il s'ensuit que la fonction D est Lipschitzienne uniformément continue. De la définition du contrôle $u(t)$ et de la restriction sur $S(t)$, $I(t)$ et $R(t) \geq 0$, on voit qu'une solution du système (3.5) existe [6].

3.4.2 L'existence d'un contrôle optimal

L'existence d'un contrôle optimal est obtenue grâce au théorème de Fleming et Rishel [36] (théorème 4.1).

Théorème 3.4.1. *Considérons le problème de contrôle associé au système (3.2). Il existe un contrôle optimal $u^*(t)$ tel que*

$$J(u^*(t)) = \min_{u \in U} J(u(t))$$

Preuve. *Pour pouvoir utiliser le résultat de Fleming [36] (corollaire du théorème 4.1), nous devons vérifier les conditions suivantes :*

1. *L'ensemble des contrôles et des solutions correspondantes est non vide.*
2. *L'ensemble des contrôles U_{ad} est convexe et fermé.*
3. *Le champ de vecteurs du système d'état est borné par une fonction linéaire du contrôle.*
4. *L'intégrande de la fonction objective est convexe.*
5. *Il existe des constantes $\rho > 1$, et $\omega_1, \omega_2 > 0$ telles que l'intégrande de la fonction objective soit bornée par $\omega_2 + \omega_1(|u|^2)^{\rho/2}$.*

On vérifie ces conditions, grâce à un résultat de Lukes [7] qui assure l'existence de solutions pour le système d'état (3.2) à coefficients bornés, ce qui donne la condition 1.

L'ensemble U_{ad} est convexe et fermé par définition, donc la condition 2 est vérifiée.

Puisque le système d'états est linéaire, Le côté droit du système (3.2) est majoré par une fonction linéaire par rapport à l'état et au contrôle. De plus, l'intégrande

dans la fonction (1), $A_1S(t) + A_2I(t) + \frac{1}{2}\tau u^2(t)$ est convexe par rapport au contrôle $u(t)$. Aussi, nous pouvons facilement voir qu'il existe une constante $\rho > 1$, et deux nombres positifs ω_1 et ω_2 tels que $A_1S(t) + A_2I(t) + \frac{1}{2}\tau u^2(t) \geq \omega_2 + \omega_1(|u|^2)^{\rho/2}$. Nous concluons qu'il existe un contrôle optimal. ■

Nous allons à présent nous intéresser à la caractérisation d'un contrôle puisque nous venons d'en montrer l'existence.

3.4.3 Caractérisation du contrôle optimal

Dans la section précédente nous avons montré l'existence d'un contrôle optimal, qui minimise la fonction (3.3) soumise au système (3.2). Pour dériver les conditions nécessaires à ce contrôle optimal, nous appliquons le principe du maximum de Pontryagin à l'hamiltonien H .

Trouvons d'abord le Lagrangien et l'Hamiltonien pour le problème de contrôle optimal (3.3)–(3.2). En fait, le lagrangien du problème optimal est donné par

$$L(S, I, u) = A_1S(t) + A_2I(t) + (1/2)\tau u^2(t). \quad (3.6)$$

On cherche la valeur minimale du lagrangien. Pour ce faire, nous définissons l'Hamiltonien H pour le problème de contrôle qui s'écrit dans notre cas sous la forme :

$$H(S, I, R, u, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t) = L(S, I, u) + \lambda_1 \frac{dS(t)}{dt} + \lambda_2 \frac{dI(t)}{dt} + \lambda_3 \frac{dR(t)}{dt}, \quad (3.7)$$

où λ_1 , λ_2 et λ_3 sont les fonctions adjointes à déterminer convenablement.

Rappelons que si $(x^*(t), u^*(t))$ est une solution optimale d'un problème de contrôle optimal, alors il existe une fonction vectorielle non triviale $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))$ satisfaisant les égalités suivantes :

$$x'(t) = \frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))}{\partial \lambda}, \quad 0 = \frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))}{\partial u},$$

$$\lambda'(t) = - \frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))}{\partial x},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} u^*(t) &= 0 && \text{si } \frac{\partial H}{\partial u} \leq 0, \\ 0 < u^*(t) < u_{\max} && \text{si } \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \\ u^*(t) &= u_{\max} && \text{si } \frac{\partial H}{\partial u} \geq 0. \end{aligned}$$

Théorème 3.4.2. *Soient $S^*(t)$, $I^*(t)$ et $R^*(t)$ des solutions d'état optimales avec la variable de contrôle associée $u^*(t)$ pour le problème de contrôle optimal (3.3)-(3.2). Alors, il existe des variables adjointes λ_1 , λ_2 et λ_3 qui satisfont*

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt} = -A_1 + \lambda_1(t)(\mu + u(t) + \Lambda_1) - \lambda_2(t)\Lambda_1 - \lambda_3(t)u(t),$$

$$\frac{d\lambda_2(t)}{dt} = -A_2 + \lambda_1(t)\Lambda_2 - \lambda_2(t)(\Lambda_2 - (\mu + \alpha + \gamma)) - \lambda_3(t)\gamma,$$

$$\frac{d\lambda_3(t)}{dt} = \lambda_3(t)\mu,$$

où

$$\Lambda_1 = \frac{\beta I(1+\alpha_2 I)}{(1+\alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \quad \text{et} \quad \Lambda_2 = \frac{\beta S(1+\alpha_1 S)}{(1+\alpha_1 S + \alpha_2 I)^2}$$

avec des conditions de transversalité

$$\lambda_i(t_{\text{end}}) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

De plus, le contrôle optimal $u^*(t)$ est donné par

$$u^*(t) = \max \left(\min \left(\frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))S^*(t)}{\tau}, u_{\max} \right), 0 \right).$$

Preuve. *Nous utilisons l'hamiltonien pour déterminer les équations adjointes et les conditions de transversalité. En posant $S(t) = S^*(t)$, $I(t) = I^*(t)$, $R(t) = R^*(t)$ et en différenciant l'hamiltonien par rapport à S , I et R , on obtient le système adjoint :*

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S} = -A_1 + \lambda_1(t)(\mu + u(t) + \Lambda_1) - \lambda_2(t)\Lambda_1 - \lambda_3(t)u(t),$$

$$\frac{d\lambda_2(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial I} = -A_2 + \lambda_1(t)\Lambda_2 - \lambda_2(t)(\Lambda_2 - (\mu + \alpha + \gamma)) - \lambda_3(t)\gamma,$$

$$\frac{d\lambda_3(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial R} = \lambda_3(t)\mu,$$

Chapitre 3. Contrôle optimal d'un modèle épidémique avec un taux d'incidence saturé

et en utilisant les conditions d'optimalité on trouve

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \tau u^*(t) - \lambda_1(t)S^* + \lambda_3(t)S^* = 0 \text{ en } u = u^*(t),$$

qui donne

$$u^*(t) = \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))S^*(t)}{\tau}$$

En utilisant la propriété de l'espace de contrôle, on obtient

$$u^*(t) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))S^*(t)}{\tau} \leq 0,$$

$$u^*(t) = \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))S^*(t)}{\tau} \quad \text{si} \quad 0 < \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))S^*(t)}{\tau} < u_{\max},$$

$$u^*(t) = u_{\max} \quad \text{si} \quad \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))S^*(t)}{\tau} \geq 0.$$

Ainsi, le contrôle optimal est caractérisé par

$$u^*(t) = \max \left(\min \left(\frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))S^*(t)}{\tau}, u_{\max} \right), 0 \right).$$

■

Le système d'optimalité est constitué du système d'états couplé au système adjoint avec les conditions initiales et de transversalité ainsi que la caractérisation du contrôle optimal. En utilisant la caractérisation du contrôle optimal, nous avons le système d'optimalité suivant :

$$\dot{S}^* = A - (\mu + u^*)S^* - \frac{\beta S^* I^*}{1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*},$$

$$\dot{I}^* = \frac{\beta S^* I^*}{1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*} - (\mu + \alpha + \gamma)I^*,$$

$$\dot{R}^* = \gamma I^* - \mu R^* + u^* S^*,$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 = & -A_1 + \lambda_1 \left(\mu + u^* + \frac{\beta I^* (1 + \alpha_2 I^*)}{(1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*)^2} \right) \\ & - \lambda_2 \left(\frac{\beta I^* (1 + \alpha_2 I^*)}{(1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*)^2} \right) - \lambda_3 u^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2 = & -A_2 + \lambda_1 \left(\frac{\beta S^* (1 + \alpha_1 S^*)}{(1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*)^2} \right) \\ & - \lambda_2 \left(\frac{\beta S^* (1 + \alpha_1 S^*)}{(1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*)^2} - (\mu + \alpha + \gamma) \right) - \lambda_3 \gamma, \end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_3 \mu,$$

avec $\lambda_1(t_{end}) = 0$, $\lambda_2(t_{end}) = 0$, $\lambda_3(t_{end}) = 0$, $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = R_0$.

Dans la section suivante, nous présentons les résultats obtenus en résolvant numériquement le système d'optimalité. Ce système comprend le système d'états, le système adjoint, les conditions de temps initiales et finales et la caractérisation des commandes.

3.5 Résolution et illustration numérique

3.5.1 La méthode GSS1 améliorée

La résolution du système d'optimalité est créée en améliorant la méthode des différences finies implicites de type Gauss–Seidel développée par Gumel et al. [1], présentée dans [20] et notée GSS1.

C'est une méthode numérique basée sur l'approximation de la dérivée par sa différence progressive du premier ordre. Elle consiste à discrétiser l'intervalle $[t_0, t_{end}]$ aux points $t_k = kl + t_0$ ($k = 0, 1, \dots, n$), où l est le pas de temps. Ensuite, nous définissons les variables d'état et les variables adjointes $S(t), I(t), R(t)$, $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ et le contrôle $u(t)$ en termes des points nodaux $S^k, I^k, R^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k$ et u^k avec S^0, I^0 ,

Chapitre 3. Contrôle optimal d'un modèle épidémique avec un taux d'incidence saturé

$R^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0$ et u^0 sont les variables d'état et adjointes et le contrôle à l'instant initial t_0 . $S^n, I^n, R^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n$ et u^n sont les variables d'état et adjointes et le contrôle à l'instant final t_{end} .

Comme il est bien connu, l'approximation de la dérivée par sa différence progressive du premier ordre (forward difference approximation) est donnée, pour la première variable d'état $S(t)$, par

$$\frac{dS(t)}{dt} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{S(t+l) - S(t)}{l}.$$

On utilise GSS1 pour l'adapter à notre cas comme suit : on calcule les variables une par une en bloquant toute autre valeur à la dernière calculée

$$\frac{S^{k+1} - S^k}{l} = A - (\mu + u^k)S^{k+1} + \frac{\beta S^{k+1} I^k}{1 + \alpha_1 S^{k+1} + \alpha_2 I^k},$$

$$\frac{I^{k+1} - I^k}{l} = \frac{\beta S^{k+1} I^{k+1}}{\Delta^k} - (\mu + \alpha + \gamma)I^{k+1},$$

$$\frac{R^{k+1} - R^k}{l} = \gamma I^{k+1} - \mu R^{k+1} + u^k S^{k+1},$$

où

$$\Delta^k := 1 + \alpha_1 S^{k+1} + \alpha_2 I^{k+1}.$$

D'une manière analogue, nous approchons la dérivée des variables adjointes par leur différence finie rétrograde du premier ordre (backward difference approximation) et nous utilisons le schéma approprié comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1^{n-k} - \lambda_1^{n-k-1}}{l} &= -A_1 + \lambda_1^{n-k-1} \left(\mu + u^k + \frac{\beta I^{k+1} (1 + \alpha_2 I^{k+1})}{(\Delta^k)^2} \right) \\ &\quad - \lambda_2^{n-k} \left(\frac{\beta I^{k+1} (1 + \alpha_2 I^{k+1})}{(\Delta^k)^2} \right) - \lambda_3^{n-k} u^k, \\ \frac{\lambda_2^{n-k} - \lambda_2^{n-k-1}}{l} &= -A_2 + \lambda_1^{n-k-1} \left(\frac{\beta S^{k+1} (1 + \alpha_1 S^{k+1})}{(\Delta^k)^2} - (\mu + \alpha + \gamma) \right) \\ &\quad - \lambda_2^{n-k-1} \left(\frac{\beta S^{k+1} (1 + \alpha_1 S^{k+1})}{(\Delta^k)^2} \right) - \lambda_3^{n-k} \gamma, \\ \frac{\lambda_3^{n-k} - \lambda_3^{n-k-1}}{l} &= \lambda_3^{n-k-1} \mu. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons établir un algorithme pour résoudre le système d'optimalité et ensuite calculer le contrôle optimal.

3.5.2 Algorithme

Step1 :

$$S(0) \leftarrow S_0, I(0) \leftarrow I_0, R(0) \leftarrow R_0,$$

$$\lambda_1(t_{end}) \leftarrow 0, \lambda_2(t_{end}) \leftarrow 0, \lambda_3(t_{end}) \leftarrow 0, u(0) \leftarrow 0$$

Step2 : For $k = 1, \dots, n$ do

$$\left[\begin{array}{l} \Delta_1^k \leftarrow ((1 + l(\mu + u^{k-1}))(1 + \alpha_2 I^{k-1}) - \alpha_1 (S^{k-1} + lA) \\ \quad - \beta I^{k-1} l)^2 + 4\alpha_1 (1 + \alpha_2 I^{k-1}) (S^{k-1} + lA) (1 + l(\mu + u^{k-1})) \\ S^k \leftarrow \frac{-(1+l(\mu+u^{k-1}))(1+\alpha_2 I^{k-1})+\alpha_1(S^{k-1}+lA)+\beta I^{k-1}}{2\alpha_1(1+l(\mu+u^{k-1}))} + \frac{\sqrt{\Delta_1^k}}{2\alpha_1(1+l(\mu+u^{k-1}))} \\ \Delta_2^k \leftarrow ((1 + \alpha_1 S^k) - \alpha_2 I^{k-1} - l\beta S^k + l(\mu + \alpha + \gamma)(1 + \alpha_1 S^k))^2 \\ \quad + 4\alpha_2 (1 + \alpha_1 S^k) (1 + l(\mu + \alpha + \gamma)) \\ I^k \leftarrow \frac{-(1+\alpha_1 S^k)+\alpha_2 I^{k-1}+l\beta S^k-l(\mu+\alpha+\gamma)(1+\alpha_1 S^k)}{2\alpha_2 l(\mu+\alpha+\gamma)} + \frac{\sqrt{\Delta_2^k}}{2\alpha_2 l(\mu+\alpha+\gamma)} \\ R^k \leftarrow \frac{R^{k-1}+l\gamma I^k+lu^{k-1}S^k}{1+l\mu} \\ \lambda_1^{n-k} \leftarrow \frac{l\lambda_2^{n-k+1}(\frac{\beta I^k(1+\alpha_2 I^k)}{(1+\alpha_1 S^k+\alpha_2 I^k)^2} + \lambda_3^{n-k+1} u^{k-1} + \lambda_1^{n-k+1} + lA_1)}{1+l(\mu+u^{k-1}) + \frac{\beta I^k(1+\alpha_2 I^k)}{(1+\alpha_1 S^k+\alpha_2 I^k)^2}} \\ \lambda_2^{n-k} \leftarrow \frac{\lambda_2^{n-k+1} + lA_2 + l\lambda_3^{n-k+1} \gamma - l\lambda_1^{n-k} (\frac{\beta S^k(1+\alpha_1 S^k)}{(1+\alpha_1 S^k+\alpha_2 I^k)^2})}{1 - l(\frac{\beta S^k(1+\alpha_1 S^k)}{(1+\alpha_1 S^k+\alpha_2 I^k)^2}) - (\mu + \alpha + \gamma)} \\ \lambda_3^{n-k} \leftarrow \frac{\lambda_3^{n-k+1}}{1+l\mu} \\ \theta^k \leftarrow \frac{(\lambda_1^{n-k} - \lambda_3^{n-k}) S^k}{\tau} \\ u^k \leftarrow \max(\min(\theta^k, u_{\max}), 0) \end{array} \right.$$

end for

Step 3 : For $k = 1, \dots, n$ write

$$S^*(t_k) = S^k, I^*(t_k) = I^k, R^*(t_k) = R^k, u^*(t_k) = u^k$$

end for

3.5.3 Résultats numériques

Ici, nous considérons un modèle épidémique SIR général et toutes les valeurs des paramètres sont choisies hypothétiquement en raison de l'indisponibilité des données du monde réel. Nous avons représenté graphiquement les individus sensibles, infectés et récupérés avec et sans contrôle en considérant les valeurs des paramètres comme $S_0 = 1000$, $I_0 = 110$, $R_0 = 61$, $\mu = 0.5$, $A = 490$, $\alpha = 0.01$, $\alpha_1 = 0.01$, $\alpha_2 = 0.01$, $\tau = 10^5$, $\beta = 0.01$, $A_1 = 100$, $A_2 = 100$, $\gamma = 0.003$.

Nous obtenons les figures ci-dessous. Les individus avec contrôle sont marqués par des lignes bleues tandis que les individus sans contrôle sont marqués par des

lignes noires en pointillés.

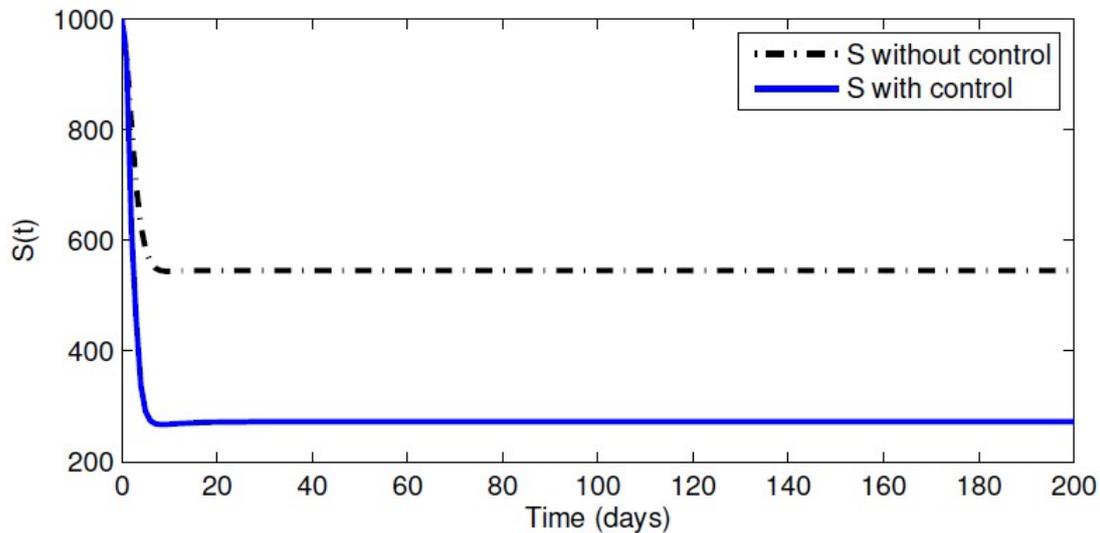


FIGURE 3.1 –

Dans la figure 3.1, nous voyons que la population des individus sensibles diminue fortement la première semaine après cela, elle commence à passer à l'état stable.

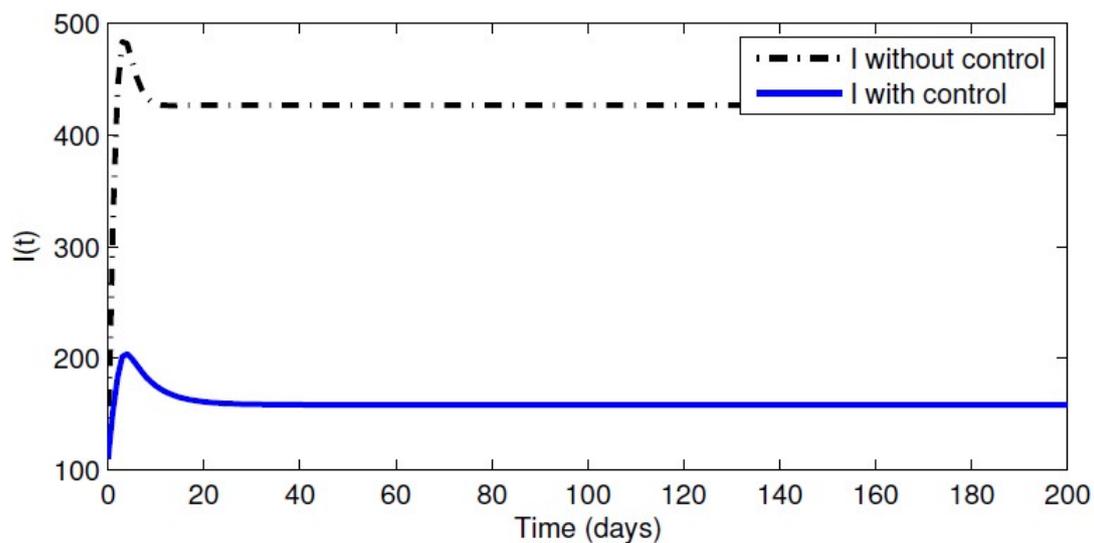


FIGURE 3.2 –

La figure 3.2 montre une différence significative dans le nombre d'individus in-

Chapitre 3. Contrôle optimal d'un modèle épidémique avec un taux d'incidence saturé

fectés avec et sans contrôle dès les premiers jours de la vaccination (dans les trois premiers jours), puis il commence à passer à l'état stable.

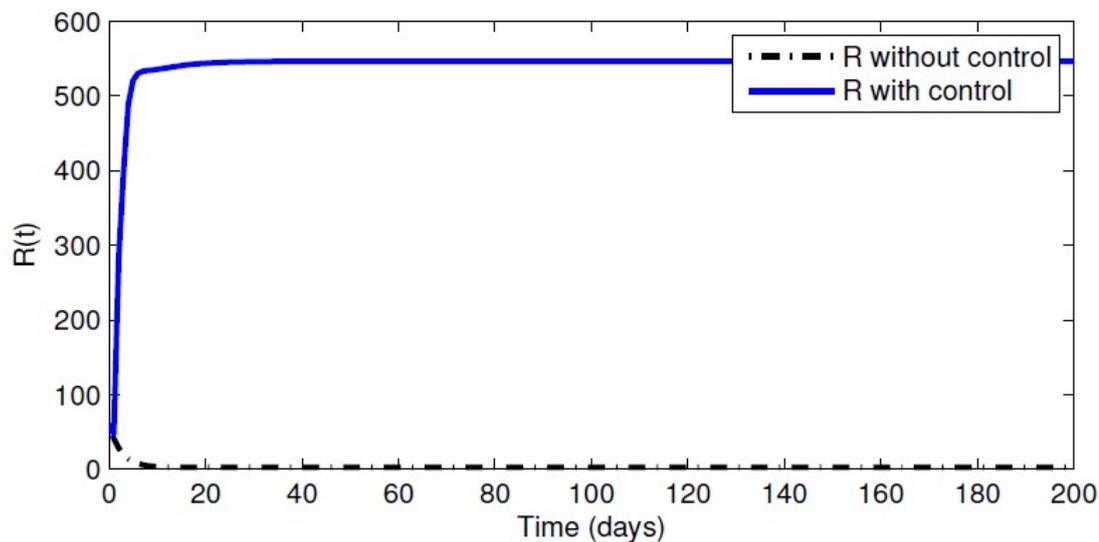


FIGURE 3.3 –

Sur la figure 3.3, on voit que la population d'individus récupérés avec vaccination augmente rapidement à partir du troisième jour et elle passe à son état stable, on voit aussi que le nombre d'individus récupérés sans contrôle est très faible. Comme prévu, la population du groupe sensible diminue et par conséquent, le groupe guéri augmente y compris le groupe sensible vacciné.

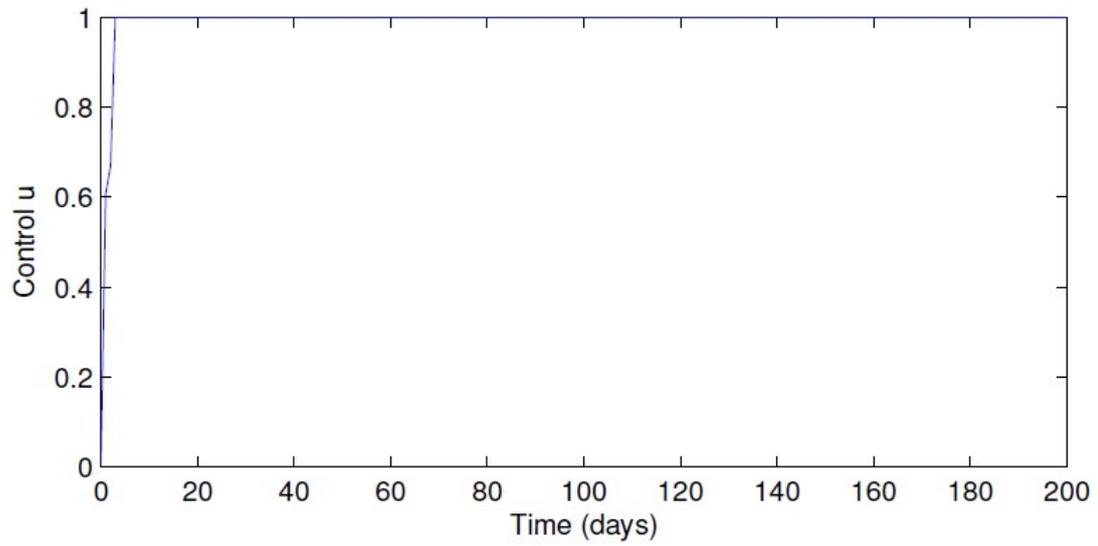


FIGURE 3.4 –

Chapitre 4

Annexe

Dans cette annexe, nous présentons quelques outils essentiels sous forme de définitions et théorèmes adaptés de différentes littératures. Comme ceux-ci sont disponibles dans la littérature existante, nous ne présentons aucune preuve. Nous les utilisons dans notre analyse comme des outils d'aide, car certains d'entre eux jouent un rôle important dans nos développements.

4.1 Résultats fondamentaux pour les équations différentielles

4.1.1 Equation différentielle

Les équations différentielles décrivent l'évolution de nombreux phénomènes dans divers domaines. Une équation différentielle est une équation impliquant une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue. Si toutes les dérivées sont prises par rapport à une seule variable, on parle d'équation différentielle ordinaire (EDO).

Soit I est un intervalle d'intérieur non vide de \mathbb{R} , U un ouvert de \mathbb{R}^n avec $n \geq 1$, et $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

Définition 1 (Equation différentielle). *Soit $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre associé à f l'équation suivante :*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad 1.1$$

L'inconnue de cette équation est une fonction d'une seule variable, et l'équation traduit une relation entre l'inconnue (notée ici x), sa variable (notée ici t) et sa dérivée première (\dot{x}). Si la fonction f ne dépend pas explicitement de la variable t , c.-à-d., si f est définie sur U à valeurs dans \mathbb{R}^n , l'équation (1.1) s'appelle équation différentielle autonome, et elle s'écrit sous la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Dans le cas contraire on dit que c'est une équation non autonome. Si f est affine, i.e. si $f(t, x) = A(t)x + B(t)$, avec $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ et $B(t) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $t \in I$, on dit que c'est une équation différentielle linéaire.

4.1.2 Problème de Cauchy

On considère l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (t, x(t)) \in I \times U, \quad \forall t \in I$$

Définition 2 (Problème de Cauchy). *Etant donné un point $(t_0, x_0) \in I \times U$, le problème de cauchy consiste à trouver une solution x de (1.1) telle que $x(t_0) = x_0$, c'est à dire résoudre le système suivant*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) & (1.3) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

Dans le cas fini, lorsque la fonction f du problème (1.4) est seulement continue, le théorème de Cauchy-Peano-Arzela affirme l'existence d'au moins une solution du problème (1.4), quelque soit $(t_0, x_0) \in I \times U$. L'unicité n'étant pas assurée en général.

Théorème 4.1.1 (Cauchy-Peano-Arzela). *Soit $(t_0, x_0) \in I \times U$, et $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue en (t_0, x_0) . Alors, il existe une solution du problème de Cauchy, associée à l'équation différentielle*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

relative à la condition initiale (t_0, x_0) .

Ce théorème assure bien l'existence d'une solution pour l'équation différentielle, avec condition initiale. Néanmoins, l'hypothèse de continuité de f ne suffit pas pour garantir l'unicité. Alors la fonction f doit être renforcée par le caractère Lipchitzien de celle-là, afin d'assurer l'unicité de la solution. Donnant le Théorème de Cauchy-Lipchitz qui assure, à la fois, l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy.

Théorème 4.1.2. *Si f est lipschitzienne en x , uniformément par rapport à t , c'est à dire*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\| \text{ pour tout } x_1, x_2 \text{ dans } U \text{ et } t \in I, k > 0$$

alors le problème de Cauchy admet une solution unique.

Dans la suite, on rappellera quelques résultats et outils de la théorie du contrôle optimal.

4.2 Résultats et outils de la théorie du contrôle optimal

Condition nécessaire du minimum en un point x^* :

On considère un problème de minimisation d'une fonction h définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Supposons, pour être précis, que $I = [a', b']$ est un intervalle fermé. Supposons que $h(x^*) \leq h(x)$ pour tout $a' \leq x \leq b'$. Alors on a

— $h'(x^*) = 0$, si $a' < x^* < b'$ (minimum local) (2.1)

— $h'(x^*) \geq 0$, si $x^* = a'$, (2.2)

— $h'(x^*) \leq 0$, si $x^* = b'$, (2.3)

à condition que les dérivées indiquées existent. Les dérivées en a' et b' doivent être interprétées comme des dérivées (unilatérales).

Ces résultats se généralisent de manière directe aux problèmes de minimisation pour une fonction définie sur un espace abstrait. Considérons le problème d'optimisation général : étant donné un ensemble U et une fonction J à valeur réelle définie sur U , trouver un élément $u^* \in U$ tel que $J(u^*) \leq J(u)$ pour tout $u \in U$.

Les conditions nécessaires pour un minimum sont obtenues en considérant des fonctions $\zeta = \zeta(\varepsilon)$ d'un certain intervalle $a' \leq \varepsilon \leq b'$, telles que la fonction composée $h(\varepsilon) = J(\zeta(\varepsilon))$ est différentiable.

En fait, on obtient immédiatement de (2.1) – (2.2) – (2.3) :

- $\left. \frac{d}{d\varepsilon} J(\zeta(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=\varepsilon^*} = 0$, si $a' < \varepsilon^* < b'$
- $\left. \frac{d}{d\varepsilon} J(\zeta(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=\varepsilon^*} \geq 0$, si $\varepsilon^* = a'$,
- $\left. \frac{d}{d\varepsilon} J(\zeta(\varepsilon)) \right|_{\varepsilon=\varepsilon^*} \leq 0$, si $\varepsilon^* = b'$,

à condition que les dérivées indiquées existent.

Définitions du Hamiltonien

Définition 3. *Considérons le système*

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)),$$

où g est une fonction de \mathbb{R}^{1+n+m} dans \mathbb{R}^n . Alors le Hamiltonien est la fonction définie par

$$\begin{aligned} H & : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, u, \lambda) & \mapsto H(t, x, u, \lambda) = \langle \lambda, g(t, x, u) \rangle, \end{aligned}$$

où \langle, \rangle est le produit scalaire de \mathbb{R}^n .

Théorème du Fleming et Rishel :

Théorème 4.2.1 (Fleming et Rishel). *On suppose que l'ensemble des contrôles admissibles pour le problème (1.2) est composé de fonctions Lebesgue intégrables sur $t_0 \leq t \leq t_1$ à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que $g(t, x, u)$ est convexe par rapport à u et qu'il existe des constantes C_1, C_2, C_3 , et $C_4 > 0$ et $\beta > 1$ telles que*

$$\begin{aligned} f(t, x, u) & = \alpha(t, x) + \beta(t, x)u \\ |f(t, x, u)| & \leq C_1(1 + |x| + |u|) \\ |f(t, x_1, u) - f(t, x, u)| & \leq C_2|x_1 - x|(1 + |u|) \\ g(t, x, u) & \geq C_3|u|^\beta - C_4 \end{aligned}$$

pour tout $t_0 \leq t \leq t_1$, $x, x_1 \in \mathbb{R}$. Alors il existe un contrôle optimal u^* maximisant $J(u)$, avec $J(u^*)$ fini.

4.3 Définitions et Préliminaires

Théorème fondamental du calcul différentiel

Le Théorème fondamental du calcul intégral et différentiel est un résultat de base, pour les fonctions d'une variable réelle, qui dit essentiellement que l'intégrale de la dérivée d'une fonction est égale à la différence des valeurs prises par cette fonction aux bornes de l'intervalle d'intégration.

Théorème 4.3.1. Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert I et soit F une primitive quelconque de f sur I . Pour a et b dans I , on a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Fonction continue par morceaux

Définition 4 (Fonction continue par morceaux). Soit f une fonction définie sur un intervalle I (fini ou infini). On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision

$\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de I telle que :

Pour chaque $i = 1, \dots, n$, f est continue sur l'intervalle ouvert $]a_{i-1}, a_i[$, admet une limite finie à droite en a_{i-1} et une limite finie à gauche en a_i .

Fonction concave

Définition 5. Soit $w : I \rightarrow \mathbb{R}$. la fonction w est concave sur $[a, b]$ si

$$\alpha w(t_1) + (1 - \alpha)w(t_2) \leq w(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2)$$

$\forall \alpha \in [0, 1]$ et pour tout t_1, t_2 dans $[a, b]$.

La fonction w sera dite convexe sur $[a, b]$ si $-w$ est concave.

Règle de la chaîne

Le nom "règle de la chaîne" est le nom donné à la formule de dérivation d'une composition de deux fonctions dérivables :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

il concerne surtout les fonctions de plusieurs variables :

Définition 6 (Règle de la chaîne). *si g est différentiable sur un ouvert U de \mathbb{R}^n , si u_1, \dots, u_n sont des fonctions d'une variable réelle définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et telles que $(u_1(t), \dots, u_n(t))$ appartienne à U pour tout $t \in I$, alors on a :*

$$(g(u_1(t), \dots, u_n(t)))' = \sum_{i=1}^n u_i'(t) \frac{\partial g}{\partial x_i}(u_1(t), \dots, u_n(t)).$$

Résumé

La problématique abordé dans ce travail se situe aux confins de deux disciplines : la théorie du contrôle optimal et l'épidémiologie. Plus précisément, nous nous sommes intéressés à l'application des techniques de contrôle optimal à l'épidémiologie.

Dans la première partie, nous avons commencé par une petite approche historique de la modélisation mathématique en épidémiologie et nous avons présenté les différents concepts de base liés à ce domaine. Ensuite, nous avons exploré l'un des outils les plus fort de la théorie du contrôle optimal "Le principe du maximum de Pontryagin" dans le but de trouver la meilleure politique de contrôle.

Afin de mieux visualiser l'importance de la théorie du contrôle optimal pour la pratique, nous avons présenté les travaux et les résultats originaux d'un article [\[13\]](#) publié par : **Hassan Laarabi**, **El Houssine Labriji**, **Mostafa Rachik**, et **Abdelilah Kaddar**, où la théorie du contrôle optimal a été appliquée dans le contexte d'un modèle SIR qui inclut un contrôle optimal visant à réduire le nombre d'infection au sein de la population humaine. À cet égard, nous nous sommes tout d'abord intéressés à la formulation du modèle (EDO) décrivant la dynamique de population. Puis, nous nous sommes concentrés sur la possibilité de contrôler le (système) par l'intermédiaire d'une techniques de lutte (la vaccination). Nous avons formulé ensuite un problème de contrôle optimal qui consiste à minimiser les individus infectées et sensibles et maximiser les individus récupérées, et en utilisant le principe du maximum de Pontryagin, l'expression explicite du contrôle optimal a été obtenue. Enfin, le problème formulé est résolu numériquement en utilisant la méthode de Gauss-seidel.

Bibliographie

- [1] A.B. Gumel, P.N. Shivakumar, B.M. Sahai, A mathematical model for the dynamics of HIV-1 during the typical course of infection, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods*, 47(3), pp. 1773–1783, 2001.
- [2] A. Kaddar, On the dynamics of a delayed SIR epidemic model with a modified saturated incidence rate, *J. Differ. Equations*, 133, pp. 1–7, 2009.
- [3] D.M. Xiao, S.G. Ruan, Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate, *Math. Biosci.*, 208, pp. 419–429, 2007.
- [4] E.B. Wilson, and J. Worcester, The law of mass action in epidemiology. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 31(1), p. 24, 1945.
- [5] F.H. Clarke. *Optimal Control and Nonsmooth Analysis*. SIAM, Philadelphia, 1990.
- [6] G. Birkhoff, G.C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, 4th edition, JohnWiley and Sons, New York, 1989.
- [7] GD.L. Lukes, *Differential Equations : Classical to Controlled*, Math. Sci. Eng., Vol. 162, Academic Press, New York, 1982.
- [8] G. Macdonald, *The epidemiology and control of malaria*, London, Oxford University Press, 1957.
- [9] G.W. Swan, Role of optimal control theory in cancer chemotherapy, *Math. Biosci.*, 101(2), pp. 237–284, 1990.
- [10] G. Zaman, Y.H. Kang, G. Cho, and I.H. Jung, Optimal strategy of vaccination and treatment in an SIR epidemic model, *Mathematics and computers in simulation* 136, pp. 63-77, 2017.
- [11] H.R. Joshi, Optimal control of an HIV immunology model, *Optim. Control Appl. Methods*, 23, pp. 199–213, 2002.

Bibliographie

- [12] H. Gaff, E. Schaefer, Optimal control applied to vaccination and treatment strategies for various epidemiological models, *Math. Biosci.*, 6(3), p. 469, 2009.
- [13] H. Laarabi, E.H. Labriji, M. Rachik, and A. Kaddar, Optimal control of an epidemic model with a saturated incidence rate, *Nonlinear analysis : modelling and control* 17(4), pp. 448-459, 2012.
- [14] H. Muench, *Catalytic models in epidemiology*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1959.
- [15] H.T. Waaler, and M.A. Piot. The use of an epidemiological model for estimating the effectiveness of tuberculosis control measures. Sensitivity of the effectiveness of tuberculosis control measures to the coverage of the population. *Bull. World Health Organ.*, 41, pp. 75-93, 1969.
- [16] H.W. Hethcote, P. van den Driessche, Some epidemiological models with non-linear incidence, *J. Math. Biol.*, 29, pp. 271–287, 1991.
- [17] H.W. Hethcote, P. Van Den Driessche, Two SIS epidemiological models for infectious disease, *J. Math. Biol.*, 40, pp. 2–26, 2000.
- [18] H.W. Hethcote, The mathematics of infectious diseases, *SIAM Rev.*, 42, pp. 599–653, 2000.
- [19] I.K. Morton, L.S. Nancy, *Dynamics Optimization : The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Elsevier Science, The Netherlands, 2000.
- [20] J. Karrakchou, M. Rachik, S. Gourari, Optimal control and infectiology : Application to an HIV/AIDS model, *Appl. Math. Comput.*, 177, pp. 807–818, 2006.
- [21] K.R. Fister, J.H. Donnelly, Immunotherapy : an optimal control theory approach. *Math. Biosci.*, 2(3), p. 499, 2005.
- [22] L. Elveback, J.P. Fox, and A. Varma, An extension of the Reed- Frost epidemic model for the study of competition between viral agents in the presence of interference. *Am. J. Hyg.*, 80(3), pp. 356-364, 1962.
- [23] L. Cai, S. Guo, X. Li, M. Ghosh, Global dynamics of a dengue epidemic mathematical model, *Chaos Solitons Fractals*, 42(4), pp. 2297–2304, 2009.
- [24] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelize, and E.F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Wiley, New York, 1962.

Bibliographie

- [25] M. Kermack, A. McKendrick, Contributions to the mathematical theory of epidemics, *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 115, pp. 700–721, 1927.
- [26] M.S. Bartlett, The critical community size for measles in the United States. *J. r. stat. Soc. A*, 123(1), pp. 37-44, 1960.
- [27] N.C. Severo, Generalizations of some stochastic epidemic models. *Math. Biosci.*, 4, pp. 395-402, 1969.
- [28] P. Das, D. Mukherjee, Y. Hsieh, An S-I epidemic model with saturation incidence : Discrete and stochastic version, *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, 1, pp. 1–9, 2011.
- [29] R. Xu, Z. Ma, Stability of a delayed SIRS epidemic model with a nonlinear incidence rate, *Chaos Solitons Fractals*, 41, pp. 2319–2325, 2009.
- [30] R.M. Anderson, and R.M. May, Helminth infections of humans : mathematical models, population dynamics, and control, *Advances in parasitology* 24, pp. 1-101, 1985.
- [31] S. Lenhart, J.T. Workman, Optimal Control Applied to Biological Models, *Mathematical and Computational Biology Series*, Chapman and Hall/CRC, London, 2007.
- [32] S. Pathak, A. Maiti, G.P. Samanta, Rich dynamics of an SIR epidemic model, *Nonlinear Anal. Model. Control*, 15(1), pp. 71–81, 2010.
- [33] S.G. Ruan, W.D. Wang, Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate, *J. Differ. Equations*, 188, pp. 135–163, 2003.
- [34] V. Capasso, G. Serio, A generalization of the Kermack–Mckendrick deterministic epidemic model, *Math. Biosci.*, 42, pp. 41–61, 1978.
- [35] V. Capasso, *Mathematical structures of epidemic systems*. Vol. 97. Springer Science and Business Media, 2008.
- [36] W.H. Fleming, R.W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer, New York, 1975.
- [37] W.M. Liu, H.W. Hethcote, and S.A. Levin, Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates. *J. Math. Biol* 25(4), pp. 359-380, 1987.