



Université Hassan II de Casablanca

Thèse de Doctorat

Présentée par

Mme Malika IZID

Spécialité

Géométrie Différentielle

Formation Doctorale

Mathématiques, Informatique et Traitement de l'Information

Sur les Indicatrices Sphériques et leurs caractérisations

Thèse présentée et soutenue à la Faculté des Sciences Ben M'Sik le 17 Janvier 2015
devant le jury composé de :

M. AAMRI	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Président
N. ACHTAICH	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Rapporteur
A. AWANE	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Rapporteur
D. ELMOUTAWAKIL	Faculté polydisciplinaire de Khouribga	Rapporteur
S. BENNANI	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Examinatrice
M.R. HILALI	Faculté des Sciences Ain Chock	Examineur
M. RIHANI	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Examineur
M. GUESSOUS	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Co-directeur de thèse
A. OUZZANI CHAHDI	Faculté des Sciences Ben M'Sik	Directrice de thèse

Etablissement : Faculté des Sciences Ben M'Sik

CEDoc : Sciences et Applications

Nom du laboratoire : Laboratoire d'Algèbre, d'Analyse et Applications

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse aux Indicatrices Sphériques d'une courbe régulière et leurs caractérisations. Il s'agit d'étudier les Indicatrices Sphériques du repère de Bishop lié à une courbe régulière donnée, et ceci, en déterminant leurs invariants de Frenet ainsi que leurs invariants de Bishop en fonction des invariants de la courbe initiale. Moyennant cette étude et une nouvelle caractérisation des courbes sphériques, on a pu prouver de nouvelles caractérisations de l'hélice générale et de nouvelles caractérisations de l'hélice oblique. Pour illustrer ces résultats, on a étudié l'exemple de l'hélice circulaire et celui des courbes de précession constante.

Keywords : Indicatrice Sphérique, Hélice Générale, Hélice Oblique, Repère de Serret-Frenet, Repère de Bishop

Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements les plus sincères à Mme Amina OUAZZANI CHAHDI d'avoir accepté d'être ma directrice de thèse. Je la remercie pour son aide illimitée, son esprit de collaboration, ses fructueuses directives et ses conseils judicieux qu'elle n'a cessés de me prodiguer et aussi, pour la liberté d'action qu'elle m'a donnée à chaque étape de ce travail. J'espère avoir été digne de la confiance qu'elle m'ait accordée et que ce travail est finalement à la hauteur de ses espérances. Elle a été pour moi une directrice de thèse attentive et disponible malgré ses nombreuses responsabilités. Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Je tiens aussi à remercier le Professeur Mohammed GUESSOUS qui a encadré cette thèse. Je n'oublie pas qu'il a été le premier à m'avoir donné une chance pour intégrer l'équipe de Géométrie et Analyse au département de Mathématiques et Informatique de la Faculté des Sciences Ben M'Sik, je lui suis très reconnaissante. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude également à Monsieur Mounir RIHANI, Professeur à la Faculté des Sciences Ben M'Sik, pour son aide précieuse, les efforts qu'il a prodigués pour l'accomplissement de ce travail. Le fait de travailler à leurs côtés, au sein de l'équipe de Géométrie et Analyse, fût un réel plaisir et surtout une vraie chance. Ils m'ont énormément appris. C'est grâce à nos discussions qu'une grande partie de nos travaux a abouti.

J'ai aussi le plaisir de présenter mes vifs remerciements aux Pr. Naceur ACHTAICH, Pr. Azouz AWANE et Pr. Driss EL MOUTAWAKIL d'avoir bien voulu accorder une partie de leur temps à la lecture de cette thèse et d'avoir accepté d'être mes rapporteurs et de juger ce travail. Je les remercie pour leur bienveillance à mon égard.

La thèse a été préparée au sein du Laboratoire Algèbre, Analyse et Applications. Je voudrais, ici, remercier son directeur Monsieur Mohamed AAMRI, Professeur à la Faculté des Sciences Ben M'Sik, de l'honneur qu'il me fait de présider le jury. Je le remercie pour sa sympathie tout au long de mon séjour au sein de l'équipe.

Je suis très honorée par la présence de Mme Samia BENNANI, Professeur à la Faculté des Sciences Ben M'Sik et Monsieur M.R.HILALI, Professeur à la Faculté des Sciences Ain Chok de Casablanca, d'avoir accepté d'examiner ce mémoire et de participer au jury.

Mes vifs remerciements s'adressent à toute ma famille qui m'a donné l'éducation sans laquelle je n'en serai pas là aujourd'hui. Mon défunt père, que Dieu ait son âme. Ma mère, ses encouragements sont pour moi les piliers fondateurs de ce que je suis et de ce que je fais. Ma soeur qui a tout fait pour m'aider, qui m'a soutenue et surtout supportée dans tout ce que j'ai entrepris. Oncles, tantes, cousins et cousines à qui je dis merci beaucoup pour vos efforts, vos aides et vos conseils. Certains étaient loin de moi, mais sont toujours près de moi, dans mes pensées et dans mon coeur.

J'aurai eu du mal à terminer ce travail sans le soutien engagé de Mon Mari, merci de ta confiance et de m'avoir soutenu et encouragé pendant cette dernière année.

Je dédie affectueusement ce mémoire et ce titre à mon grand-père et ma grand-mère maternels.

Enfin, je ne saurais oublier d'exprimer ma reconnaissance à mes collègues doctorants du départements de Mathématiques, Informatique et traitement de l'Information, aux Laboratoires LCSM et LCOCE pour l'ambiance agréable qu'ils ont su créer et pour m'avoir accueilli durant mes quatres années de doctorat.

Au terme de ce travail, c'est avec émotion que je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce projet de près ou de loin.

Table des matières

1	Rappels et compléments	9
1.1	Préliminaires	9
1.2	Courbe et vecteur tangent	10
1.3	Propriétés métriques des courbes	11
1.4	Repère mobile	12
1.4.1	Définitions et propriétés	13
1.4.2	Repère de Serret-Frenet	15
1.4.3	Repère de Bishop	17
1.5	Hélice dans E^3	19
1.5.1	Hélice générale	19
1.5.2	Hélice oblique au sens de Frenet	19
2	Les Indicatrices Sphériques de Bishop	21
2.1	Image Sphérique du vecteur tangent de Bishop	22
2.1.1	Invariants de Serret-Frenet de $\xi = \xi(s_\xi)$ en fonction des invariants de Bishop de la courbe initiale	22
2.1.2	Invariants de Serret-Frenet de $\xi = \xi(s_\xi)$ en fonction des invariants de Serret-Frenet de la courbe initiale	23
2.2	Image Sphérique du vecteur M_1 de Bishop	25
2.2.1	Invariants de Serret-Frenet de $\delta = \delta(s_\delta)$ en fonction des invariants de Bishop de la courbe initiale	25

2.2.2	Invariants de Serret-Frenet de $\delta = \delta(s_\delta)$ en fonction des invariants de Serret-Frenet de la courbe initiale	27
2.3	Image Sphérique du vecteur M_2 de Bishop	28
2.3.1	Invariants de Serret-Frenet de $\psi = \psi(s_\psi)$ en fonction des invariants de Bishop de la courbe initiale	28
2.3.2	Invariants de Serret-Frenet de $\psi = \psi(s_\psi)$ en fonction des invariants de Serret-Frenet de la courbe initiale	29
2.4	Image Sphérique du vecteur de Darboux Bishop	31
2.4.1	Etude des invariants du vecteur de Darboux Bishop	31
2.4.2	Exemple 1. Hélice circulaire	37
2.4.3	Exemple 2. Courbe de précession constante	39
3	Caractérisations de courbes spéciales moyennant les Indicatrices	
	Sphériques	42
3.1	Caractérisations des courbes sphériques	42
3.2	Caractérisations de l'hélice générale	44
3.2.1	En utilisant l'Indicatrice du vecteur tangent	44
3.2.2	En utilisant les Indicatrices des vecteurs M_1 et M_2 de Bishop .	45
3.2.3	En utilisant l'Indicatrice du vecteur de Darboux Bishop	47
3.3	Caractérisation de l'hélice oblique	48
3.3.1	En utilisant l'Indicatrice du vecteur tangent de Bishop	48
3.3.2	En utilisant le vecteur normal principal	49
3.4	Applications à l'hélice circulaire et aux courbes de précession constante	50
4	Conclusion et perspectives	52
4.1	Conclusion	52
4.2	Perspectives	56

Introduction

Le domaine dans lequel se situe ce travail est celui de la géométrie des courbes et des surfaces (géométrie différentielle classique). Dans cette branche de géométrie, on s'intéresse particulièrement à l'étude des propriétés locales des courbes d'un espace euclidien de dimension 3. Dans cet objectif, on a attaché aux courbes, en chacun de leurs points des trièdres de référence, en particulier le trièdre de Serret-Frenet et le trièdre de Bishop.

Les Indicatrices Sphériques des repères orthonormés mobiles attachés à une courbe donnée s'obtiennent en translatant des champs de vecteurs unitaires au centre de la sphère unité d'un espace euclidien de dimension 3. Les extrémités des vecteurs des champs décrivent une courbe sur la surface de la sphère dite Indatrice de la courbe. L'étude de ces courbes sphériques obtenues, permet une meilleure connaissance de la courbe initiale.

Ce travail repose sur l'étude des Indicatrices Sphériques du repère de Bishop et du vecteur de Darboux Bishop, en déterminant leurs invariants de Frenet et leurs invariants de Bishop ainsi que les relations qui lient ces derniers aux invariants de la courbe initiale. Il en découle des résultats importants qui permettent de caractériser certaines courbes spéciales comme l'hélice générale et l'hélice oblique.

Cette thèse de doctorat intitulée «Sur les Indicatrices Sphériques et leurs caractérisations» comporte quatre chapitres :

- Chapitre Introductif : portant sur les « Rappels et compléments ». On rappelle brièvement certains éléments de base de la géométrie différentielle classique,*

à savoir la notion de courbe paramétrée et plus particulièrement d'une courbe régulière paramétrisée par son abscisse curviligne, la définition du vecteur tangent et quelques propriétés métriques des courbes. Puis on introduit la théorie des repères mobiles en rappelant quelques définitions et propriétés ainsi que les deux trièdres de référence les plus connus en géométrie : le repère de Serret-Frenet et le repère de Bishop. A la fin de ce chapitre, on présente quelques courbes spéciales comme l'hélice générale et l'hélice oblique et on rappelle leurs propriétés caractéristiques.

- *Chapitre 2 : intitulé « Les Indicatrices Sphériques de Bishop ». Il est consacré à l'étude des Images Sphériques du repère de Bishop d'une courbe régulière. Dans [34], les auteurs ont entamé l'étude des Indicatrices Sphériques des champs de vecteurs du repère de Bishop d'une courbe régulière, et ceci, en exprimant leurs invariants de Frenet en fonction des invariants de Bishop de la courbe initiale. Dans ce chapitre on se propose d'approfondir cette étude, en exprimant le repère et les invariants de Serret-Frenet de chacune des Images Sphériques des vecteurs unitaires du repère de Bishop en fonction des invariants de Serret-Frenet de la courbe initiale.*

A l'instar de cette étude, on se propose aussi de compléter l'étude, à peine entamée dans [13], de l'Indicatrice Sphérique du vecteur rotation instantanée du repère de Bishop (dit aussi vecteur de Darboux Bishop) noté C , en exprimant son repère de Frenet et ses invariants de Frenet en fonction des deux repères respectifs de la courbe initiale. On complète cette étude par deux illustrations du vecteur C , dans le cas de l'hélice circulaire et dans le cas d'une courbe de précession constante.

- *Chapitre 3 : nommé « Caractérisations de Courbes Spéciales moyennant les Indicatrices Sphériques ». On commence d'abord par établir une relation qui lie les invariants de Frenet d'une courbe sphérique et on en déduit une nouvelle caractérisation de ces dernières.*

Moyennant ces résultats et l'étude des Indicatrices Sphériques dans le cha-

pitre 2, on a pu prouver de nouvelles caractérisations de l'hélice générale et de l'hélice oblique.

Ce chapitre est couronné par l'application des résultats obtenus à l'hélice circulaire, comme exemple d'une hélice générale et aux courbes de précession constante comme exemple de l'hélice oblique.

- Chapitre 4 : intitulé « *Conclusion et Perspectives* ». On énonce les différents résultats obtenus dans ce travail ainsi que certaines perspectives de travaux de recherche.

Chapitre 1

Rappels et compléments

La géométrie différentielle étudie les propriétés locales et globales des courbes et des surfaces, qui sont liées à la métrique de l'espace ambiant et aux dérivées des équations locales ou des paramétrisations locales des objets considérés. Ce chapitre rappelle un certain nombre de définitions et de propriétés concernant les courbes.

1.1 Préliminaires

- On désigne par E^3 , l'espace euclidien de dimension 3 muni du produit scalaire défini par

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ sont deux vecteurs de E^3 . Ainsi, la norme déduite de ce produit scalaire est

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. Si x et y sont des fonctions différentiables de la variable t , alors :

$$\frac{d}{dt} (\langle x, y \rangle) = \left\langle \frac{dx}{dt}, y \right\rangle + \left\langle x, \frac{dy}{dt} \right\rangle.$$

On remarquera que si x est un vecteur unitaire ($\|x\| = 1$), par dérivation de

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 1,$$

on obtient

$$\left\langle x, \frac{dx}{dt} \right\rangle = 0.$$

On conclut que les vecteurs x et $\frac{dx}{dt}$ sont alors orthogonaux.

- On désigne par S^2 la sphère de rayon $r > 0$ et de centre l'origine de E^3 , définie par

$$S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in E^3 / \langle x, x \rangle = r^2\}.$$

Si $r = 1$, S^2 est dite sphère unité.

- En notant par $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base orthonormée de E^3 et par

$$x = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \quad y = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3$$

deux vecteurs de E^3 , on rappelle la définition du produit vectoriel de x et y , noté $x \wedge y$,

$$x \wedge y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

On a bien

$$\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3.$$

1.2 Courbe et vecteur tangent

Dans cette section, on rappelle la notion de courbe paramétrée et de vecteur vitesse.

Courbe paramétrée et vecteur tangent

Définition 1.2.1 Une courbe paramétrée dans E^3 est une application

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow E^3 \\ t &\longmapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)), \end{aligned}$$

où I est un intervalle de \mathbb{R} et les composantes $\varphi_i, i = 1, 2, 3$ sont des fonctions continues sur I . On dit que la courbe paramétrée φ est de classe C^k ($k \geq 1$) si les $\varphi_i, i = 1, 2, 3$ sont de classe C^k .

Définition 1.2.2 On appelle vecteur tangent (ou vecteur vitesse) d'une courbe $\varphi(t)$ de classe C^k ($k \geq 1$), la première dérivée notée $\varphi'(t)$, définie par

$$\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \varphi_3'(t)).$$

Définition 1.2.3 La norme du vecteur tangent ($\|\varphi'(t)\|$) est appelée la vitesse de la courbe φ .

Courbe régulière

Définition 1.2.4 Une courbe $\varphi : I \longrightarrow E^3$ de classe C^k ($k \geq 1$), définie par

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)),$$

est dite régulière si

$$\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \varphi_3'(t)) \neq 0_{E^3}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si de plus $\|\varphi'\| = 1$, on dit alors que φ est une courbe à vitesse unité ou que la paramétrisation φ est normale.

1.3 Propriétés métriques des courbes

L'objet de ce paragraphe est de définir une paramétrisation normale pour une courbe régulière appelée aussi paramétrisation par l'abscisse curviligne, puis d'en déduire des invariants géométriques des courbes.

Définition 1.3.1 Soient $\varphi : I \longrightarrow E^3$ une courbe paramétrée et t_0 un point de I . On définit la longueur de la courbe φ depuis le point t_0 par le nombre suivant:

$$L(t) = \int_{t_0}^t \|\varphi'(u)\| du.$$

Remarque 1.3.2 Si la courbe possède un vecteur tangent unitaire (i.e. $\|\varphi'(u)\| = 1$), on a

$$L(t) = \int_{t_0}^t \|\varphi'(u)\| du = \int_{t_0}^t du = t - t_0.$$

On dit alors que la courbe est paramétrisée par sa longueur.

Venons-en maintenant aux propriétés métriques. Etant donnée une courbe régulière à valeurs dans un espace euclidien E^3 , on se demande si on peut définir une courbe paramétrisée par sa longueur. La proposition suivante répond à la question.

Proposition 1.3.3 Soit $\varphi : I \longrightarrow E^3$ une courbe régulière de classe C^k ($k \geq 1$). On fixe un point $t_0 \in I$ et on pose, pour tout t dans I ,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\varphi'(u)\| du.$$

La fonction s est un difféomorphisme de classe C^1 de I à valeurs dans $J = s(I)$, appelée abscisse curviligne. L'application

$$\alpha = \varphi \circ s^{-1} : s(I) \longrightarrow E^3$$

est une paramétrisation de la même courbe vérifiant

$$\|\alpha'(s)\| = 1, \quad \forall s \in J.$$

1.4 Repère mobile

En géométrie différentielle classique euclidienne, on a été conduit à attacher aux courbes en chacun de leurs points des trièdres de référence, en particulier le trièdre de Frenet et le trièdre de Bishop. Les variations infinitésimales des vecteurs de l'un de ces repères, quand le point auquel il est attaché se déplace infiniment peu, sont en relation simple avec les invariants attachés à la courbe. Les formules de Serret-Frenet et de Bishop mettent en évidence cette relation.

1.4.1 Définitions et propriétés

Généralités

On se donne une courbe régulière $\varphi : I \longrightarrow E^3$ de classe C^k ($k \geq 1$). En chaque point $M(s) = \varphi(s)$ de la courbe, on définit un repère orthonormal direct

$$(M(s), \vec{e}_1(s), \vec{e}_2(s), \vec{e}_3(s)),$$

tel que les fonctions $s \longrightarrow \vec{e}_i(s)$, pour $i = 1, 2, 3$, soient de classe C^k , avec $k \geq 1$.

Les vecteurs dérivés $\frac{d\vec{e}_i}{ds}$ s'expriment, pour $i = 1, 2, 3$ par leurs composantes dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\frac{d\vec{e}_i}{ds} = \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} \vec{e}_j, \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

Le caractère orthonormal de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ donne à la matrice de coefficients $(\omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ des propriétés particulières. En effet, en dérivant les formules

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0 \text{ pour } i \neq j \text{ et } \langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = 1,$$

on obtient :

$$\langle \vec{e}_i, \frac{d\vec{e}_j}{ds} \rangle + \langle \frac{d\vec{e}_i}{ds}, \vec{e}_j \rangle = 0 \text{ pour } i \neq j \text{ et } \langle \vec{e}_i, \frac{d\vec{e}_i}{ds} \rangle = 0,$$

autrement dit

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \text{ pour } i \neq j \text{ et } \omega_{ii} = 0.$$

La matrice antisymétrique $(\omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ est appelée matrice rotation à l'instant t du repère mobile. On a les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{e}_1}{ds} = \omega_{12}\vec{e}_2 - \omega_{31}\vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_2}{ds} = -\omega_{12}\vec{e}_1 + \omega_{23}\vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3}{ds} = \omega_{31}\vec{e}_1 - \omega_{23}\vec{e}_2. \end{array} \right.$$

Rotation instantanée

Pour tout repère mobile $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de matrice rotation antisymétrique, il existe une fonction vectorielle

$$\begin{aligned}\omega : I &\longrightarrow E^3 \\ s &\longmapsto \omega(s)\end{aligned}$$

vérifiant, pour tout $s \in I$, les relations

$$\frac{d\vec{e}_i}{ds} = \omega(s) \wedge \vec{e}_i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.1)$$

Le vecteur $\omega(s)$ est dit vecteur rotation à l'instant s du repère mobile $(M(s), \vec{e}_1(s), \vec{e}_2(s), \vec{e}_3(s))$.

Si on désigne par $(p(s), q(s), r(s))$ les composantes du vecteur $\omega(s)$ dans la base $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq 3}$, on a, par application de (1.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{e}_1}{ds} = r\vec{e}_2 - q\vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_2}{ds} = p\vec{e}_3 - r\vec{e}_1 \\ \frac{d\vec{e}_3}{ds} = q\vec{e}_1 - p\vec{e}_2, \end{array} \right.$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \left\langle \vec{e}_3, \frac{d\vec{e}_2}{ds} \right\rangle = - \left\langle \vec{e}_2, \frac{d\vec{e}_3}{ds} \right\rangle \\ q = \left\langle \vec{e}_1, \frac{d\vec{e}_3}{ds} \right\rangle = - \left\langle \vec{e}_3, \frac{d\vec{e}_1}{ds} \right\rangle \\ r = \left\langle \vec{e}_2, \frac{d\vec{e}_1}{ds} \right\rangle = - \left\langle \vec{e}_1, \frac{d\vec{e}_2}{ds} \right\rangle. \end{array} \right.$$

1.4.2 Repère de Serret-Frenet

Définition

Le repère de Serret-Frenet est un outil d'étude du comportement local des courbes. Il s'agit d'un repère local associé à un point $M = \varphi(s)$ où

$$\begin{aligned} \varphi : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow E^3 \\ s &\longmapsto \varphi(s) \end{aligned}$$

est une courbe régulière de classe C^k ($k \geq 3$), sans point d'inflexion, paramétrée par son abscisse curviligne.

Définition 1.4.1 *Le repère de Serret-Frenet au point $M(s) = \varphi(s)$ est le repère mobile orthonormé direct, noté:*

$$(M, T, N, B)$$

où

$T = \varphi'(s)$, appelé le vecteur tangent unitaire en M ,

$N = \frac{\varphi''(s)}{\|\varphi''(s)\|}$, appelée la normale principale à φ en M et

$B = T \wedge N$, orthogonal à T et à N , dit vecteur binormal à φ en M .

Remarque 1.4.2 *Par construction, les fonctions vectorielles T , N et B vérifient*

$$\begin{aligned} \langle T, N \rangle &= \langle N, B \rangle = \langle B, T \rangle = 0 \\ \langle T, T \rangle &= \langle B, B \rangle = \langle N, N \rangle = 1. \end{aligned}$$

Courbure. Torsion. Formules de Serret-Frenet

Il s'agit d'exprimer les vecteurs $\frac{dT}{ds}$, $\frac{dN}{ds}$ et $\frac{dB}{ds}$ dans le repère de Frenet.

On appelle courbure au point $M(s) = \varphi(s)$ et on note $\kappa(s)$, la fonction donnée par

$$\kappa(s) = \|\varphi''(s)\|.$$

De la définition de la normale principale, il vient

$$\frac{dT}{ds} = \kappa(s) N. \quad (1.2)$$

En dérivant les relations $\|B\|^2 = 1$, $\langle B, T \rangle = 0$ et en tenant compte de (1.2), on obtient

$$\left\langle B, \frac{dB}{ds} \right\rangle = 0 \text{ et } \left\langle T, \frac{dB}{ds} \right\rangle = 0.$$

Il s'ensuit que $\frac{dB}{ds}$ et N sont colinéaires et par suite il existe une fonction scalaire

$$\tau : s \longmapsto \tau(s)$$

appelée la fonction torsion de la courbe paramétrée φ , vérifiant

$$\frac{dB}{ds} = -\tau(s) N. \quad (1.3)$$

De même, en dérivant $\|N\|^2 = 1$, on obtient

$$\left\langle N, \frac{dN}{ds} \right\rangle = 0,$$

et en dérivant respectivement les formules $\langle T, N \rangle = 0$, $\langle B, N \rangle = 0$ et en tenant compte des formules (1.2) et (1.3), il vient

$$\left\langle T, \frac{dN}{ds} \right\rangle = -\kappa(s) \text{ et } \left\langle B, \frac{dN}{ds} \right\rangle = \tau(s).$$

Par conséquent

$$\frac{dN}{ds} = -\kappa(s)T + \tau(s)B.$$

On obtient ainsi les formules, dites formules de Serret-Frenet :

$$\begin{cases} \frac{dT}{ds} = \kappa(s) N, \\ \frac{dN}{ds} = -\kappa(s)T + \tau(s)B, \\ \frac{dB}{ds} = -\tau(s)N. \end{cases}$$

Rotation instantanée du repère de Serret-Frenet

Soient $\varphi : I \longrightarrow E^3 (s \longrightarrow \varphi(s))$ une courbe régulière de classe $C^k (k \geq 3)$, sans point d'inflexion, paramétrée par son abscisse curviligne et $(M(s), T(s), N(s), B(s))$ le repère de Serret-Frenet associé à la courbe φ en $M = \varphi(s)$. En tenant compte de ce qui précède, le vecteur rotation instantanée de ce repère est donné par

$$\omega = -\tau T + \kappa B.$$

Le vecteur ω est aussi dit, vecteur de Darboux.

1.4.3 Repère de Bishop

Définition

Le repère de Bishop ou le transport parallèle est une approche alternative pour déterminer un repère mobile qui est bien défini même si la courbe est de dérivée seconde nulle. Le repère de Bishop est un repère orthonormé, constitué du vecteur tangent T d'une courbe donnée et de deux vecteurs $\{M_1(s), M_2(s)\}$ du plan perpendiculaire à T , linéairement indépendants et relativement parallèles au plan perpendiculaire à T . Cette base doit satisfaire les conditions qui sont exprimées sous la formule matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} T' \\ M_1' \\ M_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}.$$

Définition 1.4.3 *L'ensemble $\{T, M_1, M_2\}$ est appelé le trièdre de Bishop. k_1 et k_2 les courbures de Bishop.*

Relation entre les invariants de Frenet et les invariants de Bishop

La matrice relation peut s'exprimer comme suit

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta(s) & \sin \theta(s) \\ 0 & -\sin \theta(s) & \cos \theta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Il en découle les relations suivantes entre les invariants de Frenet κ et τ et les invariants de Bishop k_1 et k_2

$$\kappa(s) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad (1.5)$$

et

$$\begin{cases} k_1 = \kappa \cos \theta(s) \\ k_2 = \kappa \sin \theta(s). \end{cases} \quad (1.6)$$

Soit

$$\theta(s) = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right), k_1 \neq 0$$

et

$$\tau(s) = \theta'(s).$$

Rotation instantanée du repère de Bishop

Le vecteur rotation instantanée du repère de Bishop, appelé aussi vecteur de Darboux Bishop, est donné par

$$\omega = -k_2 M_1 + k_1 M_2.$$

Il vérifie les équations

$$\begin{aligned} T' &= \omega \wedge T, \\ M_1' &= \omega \wedge M_1, \\ M_2' &= \omega \wedge M_2. \end{aligned}$$

Si on normalise le vecteur de Darboux Bishop, on obtient le vecteur

$$C = \frac{\omega}{\|\omega\|} = \frac{-k_2 M_1 + k_1 M_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}.$$

1.5 Hélice dans E^3

1.5.1 Hélice générale

Définition 1.5.1 Une courbe $\varphi : I \longrightarrow E^3$ régulière de classe C^k ($k \geq 1$) est dite *hélice générale* si le vecteur tangent fait un angle constant avec une direction fixe u .

Autrement dit, si on désigne par θ l'angle que le vecteur tangent T fait avec la direction fixe u , on a

$$\langle T(s), u \rangle = \cos \theta, \quad \forall s \in I.$$

Cette direction fixe u est appelée *l'axe de l'hélice*.

Proposition 1.5.2 (Propriétés caractéristiques de l'hélice générale) Soit φ une courbe régulière de classe C^k ($k \geq 3$), sans point d'inflexion et de torsion non nulle. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

- a) Les tangentes à φ font un angle constant avec une direction fixe.
- b) Les normales principales à φ sont parallèles à un plan fixe.
- c) Les binormales à φ font un angle constant avec une direction fixe.
- d) La fonction $\frac{\tau}{\kappa}$ est constante.

Exemple 1.5.3 Dans le cas particulier où κ et τ sont des constantes, l'hélice générale est dite *hélice circulaire*.

Pour tout complément d'information voir [9, 17, 18].

1.5.2 Hélice oblique au sens de Frenet

Dans [30], une hélice oblique dans un espace euclidien E^3 , est définie comme suit:

Définition 1.5.4 Soit $\varphi = \varphi(s)$ une courbe régulière à vitesse unité de courbure $\kappa(s) \neq 0$. φ est dite *hélice oblique* si la normale principale fait un angle constant avec une direction fixe.

On remarque que l'hélice générale est un cas particulier de l'hélice oblique. Dans [30], les auteurs ont prouvé la proposition suivante, qui caractérise l'hélice oblique dans E^3 .

Proposition 1.5.5 (*Propriété caractéristique de l'hélice oblique*) Soit $\varphi = \varphi(s)$ une courbe régulière de courbures κ et τ . La courbe $\varphi = \varphi(s)$ est une hélice oblique si et seulement si la courbure géodésique

$$\sigma(s) = \left[\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right] \quad (1.7)$$

de la normale principale est une fonction constante.

Chapitre 2

Les Indicatrices Sphériques de Bishop

Une courbe sphérique est une courbe tracée sur la surface d'une sphère. Une Indicatrice Sphérique d'une courbe s'obtient en translatant un champ de vecteurs unitaires défini à partir de cette courbe, au centre de la sphère unité d'un espace euclidien de dimension 3. Les extrémités des vecteurs du champ décrivent une courbe sur la surface de la sphère, cette courbe sphérique est dite Indicatrice (ou Image) Sphérique de la courbe.

Yilmaz, Ozyilmaz et Turgut ont entamé, dans [34], l'étude des Images Sphériques des champs de vecteurs du repère de Bishop d'une courbe régulière, ils ont exprimé le repère de Frenet de ces trois courbes en fonction du repère de Bishop de la courbe initiale.

Dans ce travail, on se propose d'approfondir cette étude en exprimant, cette fois ci, le repère de Frenet ainsi que les invariants du Frenet de chacune des Images Sphériques en fonction du repère de Frenet et des invariants de Frenet de la courbe initiale. Il s'ensuit des résultats importants sur la caractérisation des courbes régulières.

2.1 Image Sphérique du vecteur tangent de Bishop

Définition 2.1.1 Soit $\varphi = \varphi(s)$ une courbe régulière de E^3 . Si on translate le premier champ de vecteurs (champ de vecteurs tangents) du repère de Bishop au centre O de la sphère unité S^2 , on obtient une courbe sphérique, notée

$$\xi = \xi(s_\xi(s)) = T(s).$$

Cette courbe est appelée Image Sphérique du vecteur tangent de Bishop ou Indicatrice de la courbe $\varphi = \varphi(s)$.

2.1.1 Invariants de Serret-Frenet de $\xi = \xi(s_\xi)$ en fonction des invariants de Bishop de la courbe initiale

On considère le schéma suivant :

$$s \longrightarrow s_\xi = s_\xi(s) \longrightarrow \xi(s_\xi) = \xi(s_\xi(s)) = T(s)$$

où $s_\xi \longrightarrow \xi(s_\xi)$ est une courbe à vitesse unité.

En notant par prime ($'$) la dérivée par rapport à s et par point ($\dot{\cdot}$) la dérivée par rapport à s_ξ , il vient dans [34] :

$$T' = \xi' = \frac{d\xi}{ds_\xi} \frac{ds_\xi}{ds} = k_1 M_1 + k_2 M_2.$$

Le vecteur tangent de la courbe $\xi = \xi(s_\xi)$ est donné par

$$T_\xi = \frac{d\xi}{ds_\xi} = \frac{k_1 M_1 + k_2 M_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

où

$$\frac{ds_\xi}{ds} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}.$$

Pour déterminer la première courbure de ξ , on calcule $\dot{T}_\xi = \frac{dT_\xi}{ds_\xi}$, il vient

$$\dot{T}_\xi = -T + \frac{k_2^3}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' M_1 + \frac{k_1^3}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' M_2$$

et par suite

$$\kappa_\xi = \|\dot{T}_\xi\| = \sqrt{1 + \left[\frac{k_2^3}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right]^2 + \left[\frac{k_1^3}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \left(\frac{k_2}{k_1} \right)' \right]^2}.$$

La normale principale est donnée par

$$N_\xi = \frac{\dot{T}_\xi}{\|\dot{T}_\xi\|} = \frac{1}{\kappa_\xi} \left[-T + \frac{k_2^3}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' M_1 + \frac{k_1^3}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \left(\frac{k_2}{k_1} \right)' M_2 \right],$$

le vecteur binormal $B_\xi = T_\xi \wedge N_\xi$ s'exprime par

$$B_\xi = \frac{1}{\kappa_\xi} \left[\left(\frac{k_1^4}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{k_2}{k_1} \right)' - \frac{k_2^4}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right) T - \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} M_1 + \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} M_2 \right]$$

et la torsion de ξ , notée τ_ξ :

$$\tau_\xi = \frac{\begin{pmatrix} -k_1 \{ 3k_2' (k_1 k_1' + k_2 k_2') - (k_1^2 + k_2^2) [k_2'' - k_1 (k_1^2 + k_2^2)] \} \\ + k_2 \{ 3k_1' (k_1 k_1' + k_2 k_2') - (k_1^2 + k_2^2) [k_1'' - k_1 (k_1^2 + k_2^2)] \} \end{pmatrix}}{\left[k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1} \right)' \right]^2 + (k_1^2 + k_2^2)^3}.$$

2.1.2 Invariants de Serret-Frenet de $\xi = \xi(s_\xi)$ en fonction des invariants de Serret-Frenet de la courbe initiale

Dans ce paragraphe on se propose d'exprimer les invariants de Serret-Frenet de l'Indicatrice Sphérique du vecteur tangent en fonction des invariants de Frenet de la courbe initiale (voir [26]).

Le vecteur tangent T_ξ de la courbe $\xi = \xi(s_\xi)$ est exprimé, dans [34], par

$$T_\xi = \frac{k_1 M_1 + k_2 M_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} = \frac{1}{\kappa} (k_1 M_1 + k_2 M_2) \quad (2.1)$$

et

$$\frac{ds_\xi}{ds} = \kappa.$$

Moyennant la matrice relation (1.4), on a

$$M_1 = \cos \theta(s) N - \sin \theta(s) B \quad (2.2)$$

et

$$M_2 = \sin \theta(s) N + \cos \theta(s) B. \quad (2.3)$$

En reportant (2.2) et (2.3) dans (2.1), on obtient

$$T_\xi = \frac{1}{\kappa} [(k_1 \cos \theta(s) + k_2 \sin \theta(s)) N + (-k_1 \sin \theta(s) + k_2 \cos \theta(s)) B].$$

En utilisant les formules (1.6), il vient

$$\boxed{T_\xi = N.}$$

On dérive T_ξ par rapport à s et on utilise la deuxième formule de Frenet

$$T'_\xi = \frac{dT_\xi}{ds_\xi} \frac{ds_\xi}{ds} = N' = -\kappa T + \tau B.$$

Il s'ensuit

$$\dot{T}_\xi = \frac{dT_\xi}{ds_\xi} = -T + \frac{\tau}{\kappa} B.$$

D'où la première courbure de la courbe $\xi = (s_\xi)$

$$\boxed{\kappa_\xi = \|\dot{T}_\xi\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2},}$$

et la normale principale

$$\boxed{N_\xi = \frac{\dot{T}_\xi}{\|\dot{T}_\xi\|} = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \left(-T + \frac{\tau}{\kappa} B\right).}$$

Le vecteur binormal s'exprime, moyennant le produit vectoriel, par

$$\boxed{B_\xi = T_\xi \wedge N_\xi = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} T + B\right).}$$

Pour déterminer la torsion, on dérive B_ξ par rapport à s

$$\begin{aligned} B'_\xi &= \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} T + B\right) \right]' \\ &= \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(T - \frac{\tau}{\kappa} B\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\dot{B}_\xi = \frac{1}{k} \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(T - \frac{\tau}{\kappa}B\right).$$

En utilisant la formule de la torsion, il vient

$$\begin{aligned} \tau_\xi &= -\langle \dot{B}_\xi, N_\xi \rangle \\ &= \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \left\|T - \frac{\tau}{\kappa}B\right\|^2 \\ &= \frac{1}{\kappa} \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\tau_\xi = -\langle \dot{B}_\xi, N_\xi \rangle = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'} \quad (2.4)$$

2.2 Image Sphérique du vecteur M_1 de Bishop

Définition 2.2.1 Soit $\varphi = \varphi(s)$ une courbe régulière dans l'espace E^3 . Si on translate le deuxième champ de vecteurs du repère de Bishop au centre de la sphère unité S^2 , on obtient une courbe sphérique notée

$$\delta = \delta(s_\delta(s)) = M_1(s).$$

Cette courbe est appelée Image Sphérique du vecteur M_1 de Bishop ou Indicatrice de la courbe $\varphi = \varphi(s)$.

2.2.1 Invariants de Serret-Frenet de $\delta = \delta(s_\delta)$ en fonction des invariants de Bishop de la courbe initiale

Soit le schéma suivant

$$s \longrightarrow s_\delta(s) \longrightarrow \delta(s_\delta(s)) = M_1(s)$$

où $s_\delta \longrightarrow \delta(s_\delta)$ est une courbe à vitesse unité.

En conservant les mêmes notations pour les dérivées par rapport à s et les dérivées par rapport à s_δ , il vient dans [34]

$$M'_1 = \delta' = \frac{d\delta}{ds_\delta} \frac{ds_\delta}{ds} = -k_1 T.$$

Le vecteur tangent de la courbe $\delta = \delta(s_\delta)$ est donné par

$$T_\delta = T \quad \text{et} \quad \frac{ds_\delta}{ds} = -k_1.$$

Pour déterminer la courbure κ_δ de δ , on calcule $\dot{T}_\delta = \frac{dT_\delta}{ds_\delta}$, on a

$$T'_\delta = \dot{T}_\delta \frac{ds_\delta}{ds} = T' = k_1 M_1 + k_2 M_2.$$

Par conséquent

$$\dot{T}_\delta = -M_1 - \frac{k_2}{k_1} M_2,$$

et

$$\kappa_\delta = \left\| \dot{T}_\delta \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2}. \quad (2.5)$$

La normale principale de la courbe δ est donnée par

$$N_\delta = \frac{\dot{T}_\delta}{\left\| \dot{T}_\delta \right\|} = -\frac{1}{\kappa_\delta} M_1 - \frac{k_2}{k_1 \kappa_\delta} M_2,$$

le vecteur binormal

$$B_\delta = T_\delta \wedge N_\delta = \frac{k_2}{k_1 \kappa_\delta} M_1 - \frac{1}{\kappa_\delta} M_2$$

et la torsion de δ notée τ_δ

$$\tau_\delta = -\frac{k_1 \left(\frac{k_2}{k_1} \right)'}{k_1^2 + k_2^2}. \quad (2.6)$$

2.2.2 Invariants de Serret-Frenet de $\delta = \delta(s_\delta)$ en fonction des invariants de Serret-Frenet de la courbe initiale

Comme pour le vecteur tangent, on se propose de déterminer les invariants de Serret-Frenet de la courbe $\delta = \delta(s_\delta)$ en fonction des invariants de Serret-Frenet de la courbe initiale (voir [26]).

D'après le paragraphe précédent 2.2.1, on a

$$T_\delta = T$$

et moyennant les formules (1.6),

$$\frac{ds_\delta}{ds} = -k_1 = -\kappa \cos \theta(s).$$

La formule (1.2) permet d'écrire

$$T'_\delta = \frac{dT_\delta}{ds_\delta} \frac{ds_\delta}{ds} = T' = kN,$$

et en utilisant (1.6), il vient

$$\dot{T}_\delta = \frac{dT_\delta}{ds_\delta} = -\frac{1}{\cos \theta(s)} N,$$

d'où

$$\boxed{\kappa_\delta = \left\| \dot{T}_\delta \right\| = \frac{1}{\cos \theta(s)}} \quad (2.7)$$

et

$$N_\delta = \frac{\dot{T}_\delta}{\left\| \dot{T}_\delta \right\|} = -N.$$

Par le produit vectoriel, on obtient le vecteur binormal de l'Image Sphérique du vecteur M_1 de Bishop

$$B_\delta = T_\delta \wedge N_\delta = -B.$$

En conclusion, on obtient le repère de Serret-Frenet de l'Image Sphérique du vecteur M_1 de Bishop en fonction du repère de Frenet de la courbe initiale

$$\boxed{(T_\delta, N_\delta, B_\delta) = (T, -N, -B)}.$$

Afin de déterminer l'expression de la torsion, on dérive B_δ par rapport à s , et on utilise (1.3). Il vient

$$B'_\delta = \dot{B}_\delta \frac{ds_\delta}{ds} = -B' = \tau N,$$

d'où

$$\dot{B}_\delta = \frac{\tau}{-\kappa \cos \theta(s)} N.$$

Moyennant la formule de la torsion, on a

$$\boxed{\tau_\delta = -\langle \dot{B}_\delta, N_\delta \rangle = -\frac{\tau}{\kappa \cos \theta(s)}}. \quad (2.8)$$

2.3 Image Sphérique du vecteur M_2 de Bishop

Définition 2.3.1 Soit $\varphi = \varphi(s)$ une courbe régulière dans E^3 . Si on translate le troisième champ de vecteurs du repère de Bishop au centre O de la sphère unité S^2 , on obtient une courbe sphérique notée

$$\psi = \psi(s_\psi(s)) = M_2(s).$$

Cette courbe est appelée *Image Sphérique du vecteur M_2 de Bishop* ou *Indicatrice de la courbe $\varphi = \varphi(s)$* .

2.3.1 Invariants de Serret-Frenet de $\psi = \psi(s_\psi)$ en fonction des invariants de Bishop de la courbe initiale

Soit le schéma suivant

$$s \longrightarrow s_\psi(s) \longrightarrow \psi(s_\psi(s)) = M_2(s)$$

où $s_\psi \longrightarrow \psi(s_\psi)$ est une courbe à vitesse unité.

De même que pour M_1 , les invariants de Serret-Frenet pour la courbe $\psi = \psi(s_\psi)$ sont exprimés dans [34] comme suit

$$M'_2 = \psi' = \frac{d\psi}{ds_\psi} \frac{ds_\psi}{ds} = -k_2 T.$$

Le vecteur tangent de la courbe $\psi = \psi(s_\psi)$ est donné par

$$T_\psi = T \quad \text{et} \quad \frac{ds_\psi}{ds} = -k_2.$$

Ainsi, afin de déterminer la première courbure de $\psi = \psi(s_\psi)$ on dérive

$$T'_\psi = \dot{T}_\psi \frac{ds_\psi}{ds} = T' = k_1 M_1 + k_2 M_2.$$

Par conséquent

$$\dot{T}_\psi = -\frac{k_1}{k_2} M_1 - M_2,$$

d'où

$$\kappa_\psi = \|\dot{T}_\psi\| = \sqrt{1 + \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2}. \quad (2.9)$$

La normale principale est donnée par

$$N_\psi = \frac{\dot{T}_\psi}{\|\dot{T}_\psi\|} = -\frac{k_1}{k_2 \kappa_\psi} M_1 - \frac{1}{\kappa_\psi} M_2.$$

Moyennant le produit vectoriel $T_\psi \wedge N_\psi$, on calcule le vecteur binormal

$$B_\psi = \frac{1}{\kappa_\psi} M_1 - \frac{k_1}{k_2 \kappa_\psi} M_2.$$

En utilisant l'expression de la torsion on obtient

$$\tau_\psi = \frac{k_2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'}{k_1^2 + k_2^2}. \quad (2.10)$$

2.3.2 Invariants de Serret-Frenet de $\psi = \psi(s_\psi)$ en fonction des invariants de Serret-Frenet de la courbe initiale

Par des calculs similaires à ceux du paragraphe 2.2.2, on détermine les invariants de Serret-Frenet de la courbe $\psi = \psi(s_\psi)$ en fonction des invariants de Serret-Frenet de la courbe initiale (voir [26]).

Le vecteur tangent de $\psi = \psi(s_\psi)$ est donné par

$$T_\psi = T$$

et moyennant les formules (1.6)

$$\frac{ds_\psi}{ds} = -k_2 = -\kappa \sin \theta (s).$$

Ainsi, on dérive

$$T'_\psi = \frac{dT_\psi}{ds_\psi} \frac{ds_\psi}{ds} = T' = kN,$$

on obtient

$$\dot{T}_\psi = \frac{dT_\psi}{ds_\psi} = -\frac{1}{\sin \theta (s)} N.$$

D'où

$$\boxed{\kappa_\psi = \left\| \dot{T}_\psi \right\| = \frac{1}{\sin \theta (s)}} \quad (2.11)$$

et

$$N_\psi = \frac{\dot{T}_\psi}{\left\| \dot{T}_\psi \right\|} = -N.$$

Le produit vectoriel $T_\psi \wedge N_\psi$ permet d'exprimer le vecteur binormal de l'Image Sphérique du vecteur M_2 de Bishop

$$B_\psi = -B.$$

Ainsi, on obtient le repère de Serret-Frenet de l'Image Sphérique du vecteur M_2 de Bishop

$$\boxed{(T_\psi, N_\psi, B_\psi) = (T, -N, -B)}.$$

En vue de déterminer l'expression de la torsion, on calcule

$$B'_\psi = \dot{B}_\psi \frac{ds_\psi}{ds} = -B' = \tau N,$$

d'où

$$\dot{B}_\psi = \frac{\tau}{-\kappa \sin \theta (s)} N.$$

En utilisant les formules de la torsion, on obtient

$$\boxed{\tau_\psi = -\frac{\tau}{\kappa \sin \theta (s)}} \quad (2.12)$$

2.4 Image Sphérique du vecteur de Darboux Bishop

2.4.1 Etude des invariants du vecteur de Darboux Bishop

A l'instar des Indicatrices Sphériques des vecteurs unitaires du repère de Bishop étudiées dans [34], dans [13], l'auteur a entamé l'étude de l'Indicatrice Sphérique du vecteur unitaire de Darboux Bishop $C = \frac{\omega}{\|\omega\|}$ en calculant le vecteur dérivé C' en fonction des invariants de Bishop. Dans ce travail on se propose de compléter cette étude en exprimant le repère de Frenet ainsi que les invariants de Frenet de l'Image Sphérique du vecteur C , respectivement dans le repère de Frenet et dans le repère de Bishop de la courbe initiale (voir [25]).

Définition 2.4.1 Soit $\varphi = \varphi(s)$ une courbe régulière dans E^3 . Si on translate le champ de vecteurs de Darboux Bishop $C = \frac{\omega}{\|\omega\|}$ vers le centre O de la sphère unité S^2 , on obtient une courbe sphérique, notée

$$\alpha_C = \alpha_C(s_C(s)) = C(s).$$

Cette courbe est appelée Image Sphérique du vecteur de Darboux Bishop ou Indicatrice de la courbe $\varphi = \varphi(s)$.

En dérivant l'expression de α_C , on obtient

$$\alpha'_C = \frac{d\alpha_C}{ds_C} \frac{ds_C}{ds} = C'(s).$$

En notant la dérivation par rapport à s par prime et la dérivation par rapport à s_C par point, il vient

$$\dot{\alpha}_C \frac{ds_C}{ds} = C'.$$

Dans [13], les auteurs ont exprimé C' , en fonction des invariants de Bishop, comme suit

$$C' = \frac{k_2 k_1 k'_1 - k'_2 k_1^2}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} M_1 + \frac{k'_1 k_2^2 - k_1 k_2 k'_2}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} M_2,$$

ce qu'on peut formuler autrement

$$\begin{aligned} C' &= \frac{k_1(k_2 k_1' - k_2' k_1)}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} M_1 + \frac{k_2(k_1' k_2 - k_1 k_2')}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} M_2 \\ &= \frac{k_1 k_2^2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} M_1 + \frac{k_2^3 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} M_2. \end{aligned}$$

Comme on suppose que $\varphi = \varphi(s)$ est une courbe régulière de classe C^k ($k \geq 3$), sans point d'inflexion, on a les relations

$$\theta(s) = \arctan \frac{k_2}{k_1} \quad \text{et} \quad \tau(s) = \theta'(s).$$

Il vient

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \left(\arctan \left(\frac{k_2}{k_1} \right) \right)' \\ &= \frac{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}{1 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\tau(s) = \frac{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}{k_1^2 + k_2^2}. \quad (2.13)$$

En utilisant l'équation (1.5), il vient

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{k_2^2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.14)$$

Moyennant l'équation (2.15), on obtient une expression simplifiée de C'

$$C' = -k_1 \frac{\tau}{\kappa} M_1 - k_2 \frac{\tau}{\kappa} M_2 = \dot{\alpha}_C \frac{ds_C}{ds},$$

et par passage aux normes, il découle

$$\frac{ds_C}{ds} = \tau.$$

Il vient

$$T_{\alpha_C} = \dot{\alpha}_C = -\frac{k_1}{\kappa}M_1 - \frac{k_2}{\kappa}M_2 = -\frac{1}{\kappa}(k_1M_1 + k_2M_2).$$

Moyennant les formules (1.4) et (1.6), on obtient le vecteur tangent de l'Image Sphérique du vecteur C en fonction des invariants de Frenet,

$$\boxed{T_{\alpha_C} = -N,}$$

et moyennant (1.5), on obtient l'expression de T_{α_C} en fonction des invariants de Bishop

$$T_{\alpha_C} = -\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}M_1 - \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}M_2,$$

soit

$$\boxed{T_{\alpha_C} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2}}M_1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2}}M_2}$$

et

$$\frac{ds_C}{ds} = \tau = -\frac{k_2^2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'}{k_1^2 + k_2^2}.$$

Pour déterminer la première courbure de α_C , on dérive la formule

$$T_{\alpha_C} = -N$$

il vient

$$T'_{\alpha_C} = \dot{T}_{\alpha_C} \frac{ds_C}{ds} = -N' = \kappa T - \tau B$$

et du fait que $\frac{ds_C}{ds} = \tau$, on obtient

$$\dot{T}_{\alpha_C} = \frac{\kappa}{\tau}T - B$$

d'où

$$\boxed{\kappa_{\alpha_C} = \left\| \dot{T}_{\alpha_C} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2}.} \quad (2.15)$$

En utilisant l'équation (2.15), on obtient l'expression de κ_{α_C} en fonction des invariants de Bishop, comme suit

$$\kappa_{\alpha_C} = \sqrt{1 + \left[\frac{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1} \right)'} \right]^2}.$$

Ainsi, la normale principale est donnée par

$$N_{\alpha_C} = \frac{\dot{T}_{\alpha_C}}{\|\dot{T}_{\alpha_C}\|} = \frac{1}{\kappa_{\alpha_C}} \left[\frac{\kappa}{\tau} T - B \right].$$

De la relation matricielle (1.4), on tire

$$B = -\sin \theta(s) M_1 + \cos \theta(s) M_2,$$

et en utilisant les équations (1.5), (1.6) et (2.15) on obtient N_{α_C} en fonction des invariants de Bishop

$$N_{\alpha_C} = \frac{1}{\kappa_{\alpha_C}} \left[\frac{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1} \right)'} T + \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} M_1 - \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} M_2 \right].$$

A l'aide du produit vectoriel $T_{\alpha_C} \wedge N_{\alpha_C}$ on obtient le vecteur binormal

$$\begin{aligned} B_{\alpha_C} &= -N \wedge \frac{1}{\kappa_{\alpha_C}} \left(\frac{\kappa}{\tau} T - B \right) \\ &= -\frac{\kappa}{\tau \kappa_{\alpha_C}} N \wedge T + \frac{1}{\kappa_{\alpha_C}} N \wedge B \\ &= \frac{\kappa}{\tau \kappa_{\alpha_C}} B + \frac{1}{\kappa_{\alpha_C}} T \end{aligned}$$

soit

$$B_{\alpha_C} = \frac{1}{\kappa_{\alpha_C}} \left[T + \frac{\kappa}{\tau} B \right].$$

On peut également exprimer B_{α_C} en fonction des invariants de Bishop comme suit

$$B_{\alpha_C} = \frac{1}{\kappa_{\alpha_C}} \left[T - \frac{k_2 (k_1^2 + k_2^2)}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} M_1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} M_2 \right].$$

Afin de déterminer la torsion, on dérive B_{α_C} et on écrit

$$B'_{\alpha_C} = \dot{B}_{\alpha_C} \frac{ds_C}{ds},$$

or

$$B'_{\alpha_C} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2}} \left(T + \frac{\kappa}{\tau} B \right) \right]$$

où

$$\kappa_{\alpha_C} = \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2},$$

donc

$$B'_{\alpha_C} = -\frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right) \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left[T + \frac{\kappa}{\tau} B \right] + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2}} \left[T' + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' B + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right) B' \right].$$

A l'aide des formules de Serret-Frenet on obtient

$$\begin{aligned} B'_{\alpha_C} &= -\frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right) \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(T + \frac{\kappa}{\tau} B \right) + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2}} \left[\kappa N + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' B - \left(\frac{\kappa}{\tau}\right) \tau N \right] \\ &= -\frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right) \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} T + \left[-\frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2}} \right] B \\ &= -\frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right) \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} T + \frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} B, \end{aligned}$$

d'où

$$\dot{B}_{\alpha C} = -\frac{1}{\tau} \frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right) \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} T + \frac{1}{\tau} \frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} B.$$

A l'aide de la formule de la torsion, il vient

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha C} &= -\langle \dot{B}_{\alpha C}, N_{\alpha C} \rangle \\ &= -\left\langle -\frac{1}{\tau} \frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right) \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} T + \frac{1}{\tau} \frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} B, \frac{1}{\kappa_{\alpha C}} \left[\frac{\kappa}{\tau} T - B\right] \right\rangle \\ &= \frac{1}{\tau} \times \frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right) \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{\kappa_{\alpha C}} \left(\frac{\kappa}{\tau}\right) + \frac{1}{\tau} \times \frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{\kappa_{\alpha C}} \\ &= \frac{1}{\tau} \left[\frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^2} + \frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^2} \right], \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\tau_{\alpha C} = \frac{1}{\tau} \left[\frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2} \right]}. \quad (2.16)$$

En utilisant les équations (2.14) et (2.15), on obtient l'expression de $\tau_{\alpha C}$ en fonction des invariants de Bishop

$$\boxed{\tau_{\alpha C} = \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \left[\frac{\left(\frac{\left(k_1^2 + k_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \right)'}{1 + \left[\frac{\left(k_1^2 + k_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \right]^2} \right]}. \quad (2.17)$$

2.4.2 Exemple 1. Hélice circulaire

On considère l'hélice circulaire à vitesse unité définie par :

$$\beta = \beta(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{bs}{c} \right)$$

où $c = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.

Les invariants de Serret-Frenet de l'hélice sont comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa = \frac{a}{c^2} \\ \tau = \frac{b}{c^2} \\ T = \frac{1}{c} \left(-a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right) \\ N = \left(-\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right) \\ B = \frac{1}{c} \left(b \sin \frac{s}{c}, -b \cos \frac{s}{c}, a \right). \end{array} \right.$$

Afin de déterminer le repère de Bishop de la courbe $\beta = \beta(s)$, on calcule

$$\theta(s) = \int_0^s \frac{b}{c^2} ds = \frac{bs}{c^2}.$$

D'où la matrice de transformation liant les deux repères

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{bs}{c^2} & \sin \frac{bs}{c^2} \\ 0 & -\sin \frac{bs}{c^2} & \cos \frac{bs}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}.$$

Moyennant la méthode de Cramer, on obtient le trièdre de Bishop :

La tangente :

$$T = \frac{1}{c} \left(-a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right).$$

Le vecteur M_1 :

$$M_1 = \left(-\cos \frac{s}{c} \cos \frac{bs}{c^2} - \frac{b}{c} \sin \frac{s}{c} \sin \frac{bs}{c^2}, \frac{b}{c} \cos \frac{s}{c} \sin \frac{bs}{c^2} - \sin \frac{s}{c} \cos \frac{bs}{c^2}, -\frac{a}{c} \sin \frac{bs}{c^2} \right).$$

Le vecteur M_2 :

$$M_2 = \left(\frac{b}{c} \sin \frac{s}{c} \cos \frac{bs}{c^2} - \cos \frac{s}{c} \sin \frac{bs}{c^2}, -\frac{b}{c} \cos \frac{s}{c} \cos \frac{bs}{c^2} - \sin \frac{s}{c} \sin \frac{bs}{c^2}, -\frac{a}{c} \cos \frac{bs}{c^2} \right).$$

Il en découle le vecteur de Darboux Bishop défini précédemment

$$C = \left(\frac{b}{c} \sin \left(\frac{s}{c} \right), -\frac{b}{c} \cos \left(\frac{s}{c} \right), \frac{a}{c} \right).$$

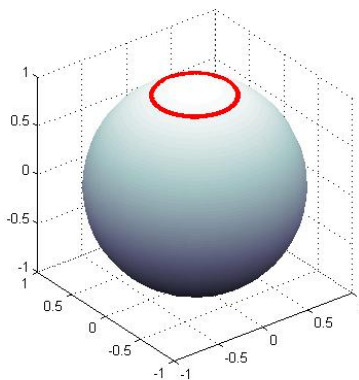


FIG. 2.1 – Indicatrices Sphériques du vecteur de Darboux Bishop de $\beta = \beta(s)$

2.4.3 Exemple 2. Courbe de précession constante

On considère la courbe à vitesse unité, notée $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1(s) = \frac{\alpha + \mu \sin[(\alpha - \mu)s]}{2\alpha} - \frac{\alpha - \mu \sin[(\alpha + \mu)s]}{2\alpha} \\ \gamma_2(s) = -\frac{\alpha + \mu \cos[(\alpha - \mu)s]}{2\alpha} + \frac{\alpha - \mu \cos[(\alpha + \mu)s]}{2\alpha} \\ \gamma_3(s) = \frac{\omega}{\mu\alpha} \sin(\mu s) \end{array} \right.$$

où

$$\alpha = \sqrt{\omega^2 + \mu^2}$$

et ω, μ sont des constantes.

Ses courbures sont exprimées dans [31] de la façon suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa(s) = -\omega \sin(\mu s) \\ \tau = \omega \cos(\mu s). \end{array} \right.$$

En particulier pour $\alpha = 26$, $\omega = 24$ et $\mu = 10$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1(s) = \frac{9}{208} \sin(16s) - \frac{1}{117} \sin(36s) \\ \gamma_2(s) = -\frac{9}{208} \cos(16s) + \frac{1}{117} \cos(36s) \\ \gamma_3(s) = \frac{6}{65} \sin(10s) \end{array} \right.$$

ainsi que

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa(s) = -24 \sin(10s) \\ \tau = 24 \cos(10s). \end{array} \right.$$

Les vecteurs du repère de Serret-Frenet le long de la courbe γ sont donnés comme suit :

La tangente :

$$T = \begin{cases} \gamma'_1 = \frac{9}{13}\cos(16s) - \frac{4}{13}\cos(36s) \\ \gamma'_2 = \frac{9}{13}\sin(16s) - \frac{4}{13}\sin(36s) \\ \gamma'_3 = \frac{12}{13}\cos(10s). \end{cases}$$

La normale principale :

$$N = \begin{cases} N_1 = \frac{6 \sin(16s)}{13 \sin(10s)} - \frac{6 \sin(36s)}{13 \sin(10s)} \\ N_2 = -\frac{6 \cos(16s)}{13 \sin(10s)} + \frac{6 \cos(36s)}{13 \sin(10s)} \\ N_3 = \frac{5}{13}. \end{cases}$$

Le binormal :

$$B = \begin{cases} B_1 = \frac{45}{169}\sin(16s) - \frac{20}{169}\sin(36s) + \frac{72 \cos(16s)}{169 \tan(10s)} - \frac{72 \cos(36s)}{169 \tan(10s)} \\ B_2 = -\frac{45}{169}\cos(16s) + \frac{20}{169}\cos(36s) + \frac{72 \sin(16s)}{169 \tan(10s)} - \frac{72 \sin(36s)}{169 \tan(10s)} \\ B_3 = -\frac{156}{169}\sin(10s). \end{cases}$$

On a aussi besoin de

$$\theta(s) = \int_0^s 24\cos(10s)ds = \frac{24}{10}\sin(10s).$$

La matrice de transformation de la courbe $\gamma = \gamma(s)$ s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{24}{10}\sin(10s)) & \sin(\frac{24}{10}\sin(10s)) \\ 0 & -\sin(\frac{24}{10}\sin(10s)) & \cos(\frac{24}{10}\sin(10s)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Cramer, on obtient le trièdre de Bishop comme suit :

La tangente :

$$T = \begin{cases} \frac{9}{13}\cos(16s) - \frac{4}{13}\cos(36s) \\ \frac{9}{13}\sin(16s) - \frac{4}{13}\sin(36s) \\ \frac{12}{13}\cos(10s). \end{cases}$$

Le vecteur M_1 :

$$M_1 = \cos\left(\frac{24}{10}\sin(10s)\right)N - \sin\left(\frac{24}{10}\sin(10s)\right)B.$$

Le vecteur M_2 :

$$M_2 = \sin\left(\frac{24}{10}\sin(10s)\right)N + \cos\left(\frac{24}{10}\sin(10s)\right)B.$$

En utilisant l'expression de C , le champ de Darboux Bishop, on obtient

$$C = -\sin\left(\frac{24}{10}\sin(10s)\right) M_1 + \cos\left(\frac{24}{10}\sin(10s)\right) M_2.$$

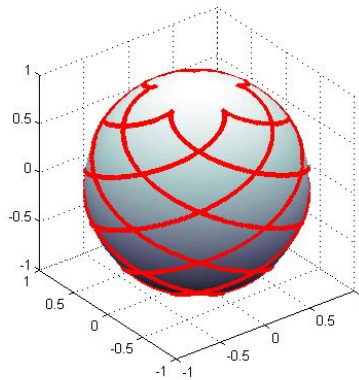


FIG. 2.2 – Indicatrice Sphériques du vecteur de Darboux Bishop de $\gamma = \gamma(s)$

Chapitre 3

Caractérisations de courbes spéciales moyennant les Indicatrices Sphériques

Plusieurs chercheurs ont donné des caractérisations de courbes spéciales, comme l'hélice générale, oblique, courbe involutive, ...etc, moyennant des Indicatrices Sphériques. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux Indicatrices Sphériques en tant que courbes sphériques. Ce qui nous amène, dans un premier temps, à donner des caractérisations des courbes sphériques (voir [25],[26]).

3.1 Caractérisations des courbes sphériques

Théorème 3.1.1 *Soit $\varphi = \varphi(s)$ une courbe régulière de courbures κ et τ . Si la courbe $\varphi = \varphi(s)$ est tracée sur la surface d'une sphère de rayon r alors ses courbures vérifient*

$$\tau^2 (r^2 \kappa^2 - 1) = \left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2. \quad (3.1)$$

Preuve 3.1.2 *Comme $\varphi = \varphi(s)$ est tracée sur une sphère de rayon r , on peut*

toujours supposer

$$\|\varphi(s)\|^2 = r^2.$$

En dérivant cette égalité, on obtient

$$\langle \varphi(s), T \rangle = 0. \quad (3.2)$$

En dérivant une deuxième fois, il vient

$$\kappa \langle \varphi(s), N \rangle = -1.$$

On remarquera que nécessairement $\kappa \neq 0$ et par suite

$$\langle \varphi(s), N \rangle = -\frac{1}{\kappa}. \quad (3.3)$$

En dérivant la formule (3.3), on obtient

$$\left\langle \varphi(s), \frac{dN}{ds} \right\rangle = \langle \varphi(s), -\kappa T + \tau B \rangle = \left(-\frac{1}{\kappa} \right)'$$

Tenant compte de (3.2), il vient

$$\tau \langle \varphi(s), B \rangle = \frac{\kappa'}{\kappa^2}. \quad (3.4)$$

De la formule $\|\varphi(s)\|^2 = r^2$, on tire

$$\left(\frac{1}{\kappa} \right)^2 + (\langle \varphi(s), B \rangle)^2 = r^2. \quad (3.5)$$

On multiplie (3.5) par τ^2 et moyennant (3.4) on obtient l'égalité recherchée.

Corollaire 3.1.3 Soit $\varphi = \varphi(s)$ une courbe régulière de courbures κ et τ , tracée sur la surface d'une sphère de rayon r .

Alors κ est une fonction constante si et seulement si $\tau = 0$.

En d'autres termes, toute courbe sphérique de courbure constante (respectivement de torsion nulle) est un cercle.

Preuve 3.1.4 La condition suffisante est claire d'après (3.1). Pour prouver que la condition est nécessaire, on suppose que κ est constante. Deux cas sont à distinguer :

1. $\kappa \neq \frac{1}{r}$. Dans ce cas $\tau = 0$ d'après l'équation (3.1).
2. $\kappa = \frac{1}{r}$. Comme φ est tracée sur une sphère, on a les formules (3.2) et (3.3), il s'ensuit que

$$\varphi(s) = -\frac{1}{\kappa}N + \langle \varphi(s), B \rangle B,$$

d'où

$$\|\varphi(s)\|^2 = r^2 \implies \left(-\frac{1}{\kappa}\right)^2 + (\langle \varphi(s), B \rangle)^2 = r^2.$$

Par conséquent

$$(\langle \varphi(s), B \rangle)^2 = 0,$$

donc

$$\langle \varphi(s), B \rangle = 0.$$

En dérivant cette dernière équation et en utilisant successivement les équations (1.3) et (3.3), il vient

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\varphi(s)}{ds}, B \right\rangle + \left\langle \varphi(s), \frac{dB}{ds} \right\rangle = 0 &\implies \langle T, B \rangle + \langle \varphi(s), -\tau N \rangle = 0 \\ &\implies \frac{\tau}{\kappa} = 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\tau = 0.$$

3.2 Caractérisations de l'hélice générale

3.2.1 En utilisant l'Indicatrice du vecteur tangent

En tenant compte de l'étude de l'Image Sphérique du vecteur tangent (paragraphe (2.1)), on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *Une courbe $\varphi = \varphi(s)$ est une hélice générale si et seulement si l'image sphérique du vecteur tangent $\xi = \xi(s_\xi)$ est un cercle.*

Preuve 3.2.2 *Supposons que $\varphi = \varphi(s)$ est une hélice générale, donc ses courbures vérifient $\frac{\tau}{\kappa} = \text{cte}$. D'après la formule 2.4, la courbure de l'Indicatrice Sphérique du vecteur tangent $\kappa_\xi = \text{cte}$. Tenant compte du corollaire 3.1.3, on conclut que $\xi = \xi(s_\xi)$ est un cercle.*

Inversement, si $\xi = \xi(s_\xi)$ est un cercle, en utilisant l'équation (2.4) et la proposition 1.5.2, on conclut que $\varphi = \varphi(s)$ est une hélice générale.

3.2.2 En utilisant les Indicatrices des vecteurs M_1 et M_2 de Bishop

Soit $\varphi = \varphi(s)$ une courbe régulière de courbure non nulle. On désigne par (T, M_1, M_2) le repère de Bishop associé à φ . On obtient les résultats suivants :

Théorème 3.2.3 *Soit $\delta = \delta(s_\delta)$ l'Image Sphérique du vecteur M_1 du repère de Bishop de la courbe régulière $\varphi = \varphi(s)$. Il existe une relation entre les invariants de Serret-Frenet de la courbe $\delta = \delta(s_\delta)$ et ceux de $\varphi = \varphi(s)$ comme suit :*

$$\frac{\tau}{\kappa} = -\frac{\tau_\delta}{\kappa_\delta}.$$

Preuve 3.2.4 *Soient $\varphi = \varphi(s)$ une courbe régulière de courbure $\kappa \neq 0$ et $\delta = \delta(s_\delta)$ l'Image Sphérique du vecteur M_1 de Bishop.*

Moyennant les équations (2.6) et (2.7), on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \frac{\tau_\delta}{\kappa_\delta} &= \frac{k_1 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}{-\frac{k_1^2 + k_2^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2}}} \\
 &= \frac{k_1 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}{-\frac{k_1^2 + k_2^2}{\frac{1}{k_1} \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}} \\
 &= -\frac{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= -\frac{\tau}{\kappa}
 \end{aligned}$$

(voir (2.15)).

Remarque 3.2.5 *Le théorème 3.2.3 est immédiat, si on utilise les expressions de τ_δ et κ_δ dans le repère de Frenet de la courbe initiale (voir (2.8) et (2.9)).*

De même, on énonce un théorème analogue pour la courbe $\psi = \psi(s_\psi)$,

Théorème 3.2.6 *Soit $\psi = \psi(s_\psi)$ l'Image Sphérique du vecteur M_2 de Bishop de la courbe régulière $\varphi = \varphi(s)$. Il existe une relation entre les invariants de Serret-Frenet de la courbe $\psi = \psi(s_\psi)$ et ceux de $\varphi = \varphi(s)$ comme suit :*

$$\frac{\tau}{\kappa} = -\frac{\tau_\psi}{\kappa_\psi}.$$

Preuve 3.2.7 *Soient $\varphi = \varphi(s)$ une courbe régulière de courbure $\kappa \neq 0$ et $\psi = \psi(s_\psi)$ l'Image Sphérique du vecteur M_2 de Bishop.*

En utilisant les expressions (2.10) et (2.11), il vient

$$\begin{aligned} \frac{\tau_\psi}{\kappa_\psi} &= \frac{k_2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'}{k_1^2 + k_2^2} \\ &= \frac{k_2^2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\tau}{\kappa} \end{aligned}$$

(voir (2.15)).

Remarque 3.2.8 *Le théorème 3.2.6 est immédiat moyennant les nouvelles expressions de κ_ψ et τ_ψ dans le repère de Frenet (voir (2.12) et (2.13)).*

Des théorèmes 3.2.3 , 3.2.6 et de la proposition 1.5.2, découle une nouvelle caractérisation de l'hélice générale :

Théorème 3.2.9 *Une courbe $\varphi = \varphi(s)$ est une hélice générale si et seulement si l'Image Sphérique du vecteur M_1 (respectivement M_2) de Bishop est une hélice générale.*

3.2.3 En utilisant l'Indicatrice du vecteur de Darboux Bishop

De l'étude sur les invariants de Frenet de l'Image Sphérique du vecteur de Darboux Bishop (paragraphe 2.4), découle le théorème suivant:

Théorème 3.2.10 *Une courbe $\varphi = \varphi(s)$ est une hélice générale si et seulement si l'Image Sphérique du vecteur de Darboux Bishop $\alpha_C = \alpha_C(s_C)$ est un cercle.*

Preuve 3.2.11 *En tenant compte de la formule (2.16) donnant la courbure de α_C :*

$$\kappa_{\alpha_C} = \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2},$$

le raisonnement est le même que celui utilisé dans la démonstration du théorème 3.2.1.

On pourra regrouper les résultats du paragraphe 3.2. en énonçant le théorème suivant :

Théorème 3.2.12 *Soient $\varphi = \varphi(s)$ une courbe régulière de courbure non nulle, (T, M_1, M_2) le repère de Bishop associé à φ et C le vecteur de Darboux Bishop . Alors les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. $\varphi = \varphi(s)$ une hélice générale.
2. L'Image Sphérique du vecteur tangent est un cercle.
3. L'Image Sphérique du vecteur M_1 de Bishop est une hélice générale .
4. L'Image Sphérique du vecteur M_2 de Bishop est une hélice générale .
5. L'Image Sphérique du vecteur de Darboux Bishop est un cercle.

3.3 Caractérisation de l'hélice oblique

3.3.1 En utilisant l'Indicatrice du vecteur tangent de Bishop

L'étude de l'Indicatrice Sphérique du vecteur tangent $\xi = \xi(s_\xi)$, qui consiste à déterminer ses invariants de Frenet en fonction de celles de la courbe initiale (paragraphe 2.1.2), nous amène a énoncer le résultat suivant:

Théorème 3.3.1 *Soit $\xi = \xi(s_\xi)$ l'Image Sphérique du vecteur tangent d'une courbe régulière $\varphi = \varphi(s)$. Il existe une relation entre les invariants de Serret-Frenet de $\xi = \xi(s_\xi)$ et de γ , comme suit*

$$\frac{\tau_\xi}{\kappa_\xi} = \sigma(s). \quad (3.6)$$

Preuve 3.3.2 *Moyennant les équations (1.7), (2.4) et (2.5), on montre immédiatement la relation demandée.*

Du théorème précédent 3.3.1 et les propositions 1.5.2 et 1.5.5, on obtient une nouvelle caractérisation de l'hélice oblique au sens de Frenet comme suit :

Théorème 3.3.3 *Une courbe $\varphi = \varphi(s)$ est une hélice oblique selon Frenet si et seulement si l'Indicatrice Sphérique du vecteur tangent de Bishop est une hélice générale.*

3.3.2 En utilisant le vecteur normal principal

Dans cette section, on donne une caractérisation d'une courbe régulière $\varphi = \varphi(s)$ de classe C^k ($k \geq 3$), moyennant une remarque donnée dans [22] sur l'Image Sphérique de la normale principale (N).

Remarque 3.3.4 *En notant par $\{T_N, N_N, B_N\}$ le repère de Serret-Frenet de l'Image Sphérique de la normale principale $N = N(s)$ de la courbe $\varphi = \varphi(s)$. La première courbure du repère de Serret-Frenet s'écrit sous la forme suivante*

$$\kappa_N = \frac{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)^2 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2}}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La courbure de l'Indicatrice N peut également s'écrire de la façon suivante

$$\kappa_N = \sqrt{1 + \sigma^2(s)}.$$

En utilisant le résultat du corollaire 3.1.3, la proposition 1.5.5 et la remarque précédente, il est facile d'énoncer le théorème :

Théorème 3.3.5 *Une courbe $\varphi = \varphi(s)$ est une hélice oblique au sens de Serret-Frenet si et seulement si l'Image Sphérique de la normale principale est un cercle.*

On pourra aussi regrouper les résultats du paragraphe 3.3 comme suit :

Théorème 3.3.6 Soit $\varphi = \varphi(s)$ une courbe régulière de classe C^k ($k \geq 3$). On désigne par T son vecteur tangent et N le vecteur normale principale. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $\varphi = \varphi(s)$ est une hélice oblique au sens de Frenet
2. L'Image Sphérique du vecteur tangent est une hélice générale.
3. L'Image Sphérique de la normale principale est un cercle.

3.4 Applications à l'hélice circulaire et aux courbes de précession constante

Exemple 3.4.1 On reprend l'exemple de l'hélice circulaire (Paragraphe 2.4.2 exemple 1).

On calcule les courbures de Frenet des Indicatrices Sphériques du repère de Bishop de la courbe $\beta = \beta(s)$ on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_\xi = \frac{c}{a} \\ \tau_\xi = 0 \\ \kappa_\delta = \frac{1}{\cos\left(\frac{bs}{c^2}\right)b} \\ \tau_\delta = -\frac{1}{a \cos\left(\frac{bs}{c^2}\right)} \\ \kappa_\psi = \frac{1}{\sin\left(\frac{bs}{c^2}\right)} \\ \tau_\psi = -\frac{b}{a \sin\left(\frac{bs}{c^2}\right)}. \end{array} \right.$$

et

$$\frac{\tau}{\kappa} = -\frac{\tau_\delta}{\kappa_\delta} = -\frac{\tau_\psi}{\kappa_\psi} = \frac{b}{a}.$$

On en déduit que l'Indicatrice Sphérique du vecteur tangent est un cercle et que les Indicatrices Sphériques du vecteur M_1 de Bishop, ainsi que le vecteur M_2 de Bishop sont des hélices sphériques.

Exemple 3.4.2 On considère la courbe à vitesse unité $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \frac{\alpha + \mu \sin [(\alpha - \mu) s]}{2\alpha} - \frac{\alpha - \mu \sin [(\alpha + \mu) s]}{2\alpha} \\ \gamma_2 = -\frac{\alpha + \mu \cos [(\alpha - \mu) s]}{2\alpha} + \frac{\alpha - \mu \cos [(\alpha + \mu) s]}{2\alpha} \\ \gamma_3 = \frac{\omega}{\mu\alpha} \sin (\mu s). \end{array} \right.$$

où

$$\alpha = \sqrt{\omega^2 + \mu^2}$$

et α , ω et μ sont des constantes. Les courbures de γ sont exprimées dans [31] par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa(s) = -\omega \sin(\mu s) \\ \tau = \omega \cos(\mu s). \end{array} \right.$$

Moyennant les expressions des courbures de Frenet de l'Indicatrice Sphérique du vecteur tangent (2.4) et (2.5), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_\xi = \frac{1}{\sin(\mu s)} \\ \tau_\xi = \frac{\mu}{\omega} \frac{1}{\sin(\mu s)}. \end{array} \right.$$

Moyennant (3.6), il vient

$$\sigma(s) = \frac{\tau_\xi}{\kappa_\xi} = \frac{\mu}{\omega} = Cte,$$

et

$$\frac{\tau}{\kappa} \neq \text{constant}$$

Il s'ensuit que $\gamma = \gamma(s)$ est une hélice oblique qui n'est pas une hélice générale.

Chapitre 4

Conclusion et perspectives

4.1 Conclusion

Dans ce travail, on a contribué à l'étude des courbes sphériques et plus particulièrement des Indicatrices Sphériques d'une courbe régulière.

Soit $\varphi = \varphi(s)$ une courbe régulière de courbures non nulles. On désigne par (T, N, B) son repère de Frenet, κ, τ ses invariants de Frenet, (T, M_1, M_2) son repère de Bishop et par k_1, k_2 ses invariants de Bishop.

Cette contribution consiste à déterminer le repère de Frenet ainsi que les invariants de Frenet des Images Sphériques du repère de Bishop lié à la courbe $\varphi = \varphi(s)$ ($s \rightarrow T(s), s \rightarrow M_1(s)$ et $s \rightarrow M_2(s)$) et l'Image Sphérique du vecteur rotation instantanée de ce repère ($s \rightarrow C(s)$).

Les résultats obtenus peuvent être regroupés dans les deux tableaux récapitulatifs

suivants :

Tableau 1 : Repère de Frenet et invariants de Frenet des Indicatrices Sphériques de Bishop de la courbe $\varphi = \varphi(s)$

	Image Sphérique de $T : \xi = \xi(s_\xi)$	Image Sphérique de $M_1 : \delta = \delta(s_\delta)$	Image Sphérique de $M_2 : \psi = \psi(s_\psi)$
Vecteur Tangent	$T_\xi = N$	$T_\delta = T$	$T_\psi = T$
Courbure	$\kappa_\xi = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}$	$\kappa_\delta = \frac{1}{\cos \theta(s)}$	$\kappa_\psi = \frac{1}{\sin \theta(s)}$
Vecteur Normal	$N_\xi = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \left(-T + \frac{\tau}{\kappa} B\right)$	$N_\delta = -N$	$N_\psi = -N$
Vecteur Binormal	$B_\xi = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} T + B\right)$	$B_\delta = -B.$	$B_\psi = -B$
Torsion	$\tau_\xi = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$	$\tau_\delta = -\frac{\tau}{\kappa \cos \theta(s)}$	$\tau_\psi = -\frac{\tau}{\kappa \sin \theta(s)}$

Tableau 2 : Repère de Frenet et invariants de Frenet
de l'Indicatrice Sphérique du vecteur rotation
instantanée de Bishop de la courbe $\varphi = \varphi(s)$

Image Sphérique du vecteur de Darboux Bishop $\alpha_C = \alpha_C(s_C)$		
	En fonction des invariants de Frenet	En fonction des invariants de Bishop
Vecteur Tangent	$T_{\alpha_C} = -N$	$T_{\alpha_C} = -\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} M_1 - \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} M_2$
Courbure	$\kappa_{\alpha_C} = \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2}$	$\kappa_{\alpha_C} = \sqrt{1 + \left[\frac{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}\right]^2}$
Vecteur Normal	$N_{\alpha_C} = \frac{1}{\kappa_{\alpha_C}} \left[\frac{\kappa}{\tau} T - B\right]$	$N_{\alpha_C} = \frac{1}{\kappa_{\alpha_C}} \left[\frac{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} T + \frac{1}{\kappa_{\alpha_C}} \left[\frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} M_1 - \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} M_2\right]\right]$
Vecteur Binormal	$B_{\alpha_C} = \frac{1}{\kappa_{\alpha_C}} \left[T + \frac{\kappa}{\tau} B\right]$	$B_{\alpha_C} = \frac{1}{\kappa_{\alpha_C}} \left[T - \frac{k_2 (k_1^2 + k_2^2)}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} M_1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} M_2\right]$
Torsion	$\tau_{\alpha_C} = \frac{1}{\tau} \left[\frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2}\right]$	$\tau_{\alpha_C} = \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \frac{\left(\frac{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}\right)'}{1 + \left[\frac{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}\right]^2}$

En prouvant une relation liant les invariants de Frenet d'une courbe sphérique,

on a pu en déduire une nouvelle caractérisation de ces courbes :

"Tout courbe sphérique de courbure constante (respectivement de torsion nulle) est un cercle".

Moyennant ce résultat et l'étude des Indicatrices Sphériques de Bishop. On a pu prouver de nouvelles caractérisations de l'hélice générale et de l'hélice oblique, qu'on peut résumer en deux théorèmes :

Théorème 4.1.1 *Soient $\varphi = \varphi(s)$ une courbe régulière de courbure non nulle, (T, M_1, M_2) le repère de Bishop associé à φ et C le vecteur de Darboux Bishop. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. $\varphi = \varphi(s)$ est une hélice générale.
2. L'Image Sphérique du vecteur tangent est un cercle
3. L'Image Sphérique du vecteur M_1 de Bishop est une hélice générale.
4. L'Image Sphérique du vecteur M_2 de Bishop est une hélice générale
5. L'Image Sphérique du vecteur de Darboux Bishop est un cercle.

Théorème 4.1.2 *Soit $\varphi = \varphi(s)$ une courbe régulière de classe C^k ($k \geq 3$). On désigne par T son vecteur tangent et N le vecteur normale principale. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. $\varphi = \varphi(s)$ est une hélice oblique au sens de Frenet.
2. L'Image Sphérique du vecteur tangent est une hélice générale.
3. L'Image Sphérique de la normale principale est un cercle.

On termine cette étude par l'application du théorème 4.1.1 à l'hélice circulaire comme cas particulier d'une hélice générale. On montre aussi, moyennant le théorème 4.1.2 qu'une courbe de précession constante est une hélice oblique qui n'est pas une hélice générale.

4.2 Perspectives

Comme continuité de ce travail, on projette :

- D’approfondir l’étude des Indicatrices Sphériques déjà existantes et aussi de définir de nouvelles Indicatrices, dans le but de mieux cerner les courbes initiales.
- D’appliquer les résultats obtenus, pour une meilleure connaissance de certaines courbes spéciales.
- A l’instar des courbes, explorer l’étude locale des surfaces moyennant les Indicatrices Sphériques de leurs repères locaux. L’étude des courbes attachées aux surfaces nécessite l’utilisation des repères mobiles comme le repère de Darboux. Le but est d’étudier les Indicatrices Sphériques de ces repères et d’en déduire de nouvelles caractérisations liées aux surfaces.
- De voir l’intérêt de l’étude des Indicatrices Sphériques des courbes pour le traitement de l’image. En effet, les courbes apparaissent dans des problèmes liés au traitement de l’image, en particulier les courbes : B-spline, de plis, de Bézier ...etc. La notion de courbure est très utile et a de nombreuses conséquences, aussi bien théoriques que pratiques, par exemple dans la Conception Assistée par Ordinateur. L’objectif est de voir l’impact de l’étude des Indicatrices Sphériques dans le domaine de l’imagerie.

Bibliographie

- [1] A.T. Ali, New special curves and their spherical indicatrices, arXiv :0909.2390v1 [math.DG] 13 Sep 2009.
- [2] A. T. Ali and R. Lopez, On Slant Helices in Minkowski Space E_3 , 1, arxiv :0810.1464v1[math.DG] 8 Oct 2008.
- [3] B. B. A. and Karacan, M.K. The Bishop Darboux Rotation Axis of the Spacelike Curve in Minkowski 3-Space, Ege University, Journal of the Faculty of Science, 3, (1), 1 – 5,2007.
- [4] B. B. A. and Karacan, M.K. On the slant helices according to Bishop frame of the timelike curve in Lorentzian space, Tamkang J. Math., 39, (3), 255 – 262, 2008.
- [5] B. B. A. and Karacan, M.K. Special Bishop motion and Bishop Darboux rotation axis of the space curve, J. Dyn. Syst. Geom. Theor., 6, (1), 27–34, 2008
- [6] B. B. and Karacan, M.K. The Slant Helices According to Bishop Frame, Int.J. Comput. Math.Sci., 3, (2), 67 – 70, 2009.
- [7] Bishop, L.R. There is More Than one Way to Frame a Curve, Amer. Math. Monthly, 82 (3) , 246 – 251, 1975.
- [8] BEYHAN UZUNOĞLU, İSMAİL GÖK AND YUSUF YAYLI, A New Approach on curves of constant Precession, arXiv :1311.4730 [math.DG], 19 Nov 2013.
- [9] Do Carmo, M.P., Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.

- [10] Emin Özyılmaz, Classical Differential Geometry Of Curve According to Type-2 Bishop Trihedra, Mathematical and Computational Applications, Vol. 16, No.4, pp. 858 – 867, 2011. Association for Scientific Research
- [11] Henri Cartan, Cours de Calcul Différentiel, 1982.
- [12] Handan Oztekin and Serpil Tatlipinar, Spherical Images And Involute Of Slant Helices In Euclidean And Minkowski 3-Space, Acta Universitatis Apulensis, ISSN : 1582 – 5329, No. 30/2012, pp. 135 – 146.
- [13] Ilkay ARSLAN GÜVEN and Semra KAYA NURKAN, The Relation Among Bishop Spherical Indicatrix Curves, International Mathematical Forum, Vol.6, 2011, no. 25, 1209 - 1215.
- [14] I. Arslan and H.H. Hacısalihoğlu, On the spherical representatives of a curve, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 4(34)(2009), 1665 – 1670.
- [15] Jacques DIXMIER et Pierre DUGAC, Cours de mathématiques du premier cycle
- [16] J. Hanson Andrew, Hui Ma, "Parallel Transport Approach To Curve Framing", Indiana University, Techreports- TR425, January 11, 1995.
- [17] J. LELONG-FERRAND, Géométrie Différentielle, MASSON et Cie, Paris, 1963.
- [18] J. Lelong-Ferrand, J.M.Arnaudiès, Cours de mathématiques, Tome 3, Géométrie et cinématique, BORDAS. Paris 1977.
- [19] Karacan, M.K. and BÄukcÄu, B. Bishop frame of the timelike curve in Minkowski 3-space, Fen Derg.,3, (1), 80 – 90, 2008.
- [20] Karacan, M.K., BÄukcÄu, B. and Yuksel, N. On the dual Bishop Darboux rotation axis of the dual space curve, Appl. Sci., 10, 115 – 120, 2008.
- [21] L. Kula, Y. Yayli. On the Slant Helix and its Spherical Indicatrix, Applied Mathematics and Computation 169 (2005) 600 – 607.
- [22] L.Kula, N. Ekmekci, Y. Yayli and K. Ilarslan. Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space, Turk.J. Math, 34 (2010) , 261 – 273.

- [23] Michèle Audin, *Géométrie*, 2006 EDP Sciences.
- [24] MANUEL BARROS, General Helices And A Theorem of LancretT, ProceedingsOf The American Mathematical Society, Volume 125, Number 5, May 1997, Pages 1503 – 1509, S 0002 – 9939(97)03692 – 7
- [25] M. IZID, A. OUAZZANI CHAHDI, M. GUESSOUS and M. RIHANI, NEW CHARACTERIZATIONS FOR SPECIAL CURVES USING THE SPHERICAL INDICATRICES, Transnational Journal of Mathematical Analysis and Applications Volume 1, Issue 1 (2013), Pages 1 – 55.
- [26] M. IZID, A. OUAZZANI, M. GUESSOUS and M. RIHANI, ON SERRET-FRENET INVARIANTS OF BISHOP SPHERICAL INDICATRICES, International Journal of Mathematical Sciences and Engineering Applications (IJMSEA), Volume 8, No. IV, July 2014.
- [27] Pablo CROTTI, Courbes régulières, Proséminaire Automne 2008, Université de FRIBOURG SUISSE.
- [28] Raheleh Ghadami, Yusuf Yayli, A New Characterization For Inclined Curves By The Help of Spherical Representations According To Bishop Frame, International Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 74 No. 4, 2012, 455 – 463
- [29] Sezai Kızıltuğl , Semra Kaya, Omer Tarakcı THE SLANT HELICES ACCORDING TO TYPE-2 BISHOP FRAME IN EUCLIDEAN 3-SPACE, International Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 85 No. 2, 2013, 211 – 222
- [30] S. Izumia, N. Takeuchi. New Special Curves and Developable Surfaces, Turk.J.Math, 28 (2004) , 153 – 163.
- [31] Scofield, P.D., Curves of Constant Precession, Amer. Math. Monthly, 102, 531 – 537, 199
- [32] Suleyman Enyurt Omer Faruk Caliskan, The Natural Lift Curves And Geodesic Curvatures Of The Spherical Indicatrices Of The Timelike Bertrand Curve

Couple, International Electronic Journal of Geometry Volume 6 No.2 pp. 88 – 99(2013) IEJG

- [33] Shifrin, T., Differential Geometry : A First Course in Curves and Surfaces (Preliminary Version), University of Georgia, 2010.
- [34] S. Yilmaz, E. Özyilmaz and M. Turgut, New Spherical Indicatrices And Their Characterizations, An. St. Univ. Ovidius Constanta 18 (2) , 2010, 337 – 354
- [35] S. Yilmaz and M. Turgut, A new version of Bishop frame and application to spherical images, J. Math. Anal. Appl., 371(2)(2010), 764 – 776.
- [36] S. Yilmaz, Bishop spherical images of a spacelike curve in Minkowski 3- space, Int. J. Phys. Scien.,5(6), (2010), 898 – 905.
- [37] Y³ilmaz, S. Position Vectors of Some Special Space-like Curves according to Bishop frame in Minkowski Space E_1^3 , Sci. Magna,5(1), 48 – 50, 2009.
- [38] Yusuf YAYLI , Semra SARACOGLU, Characterizations of Special Curves, arXiv :1202.0133v1 [math.DG] 1 Feb 2012.

Articles

NEW CHARACTERIZATIONS FOR SPECIAL CURVES USING THE SPHERICAL INDICATRICES

M. IZID, A. OUZZANI CHAHDI, M. GUESSOUS
and M. RIHANI

Department of Mathematics
Ben M'Sik Faculty of Science
Hassan II Mohammadia-Casablanca University
P 7955 Casablanca
Morocco
e-mail: ouazzaniamina@hotmail.com

Abstract

In this paper, we determine the relation between the Frenet-Serret invariants of γ and the Frenet-Serret curvatures of the spherical indicatrix of tangent vector, principal normal vector, and Bishop Darboux vector to give a new characterization of a general helix and a slant helix. Additionally, the new study of Bishop Darboux spherical indicatrix is given. Finally, we have presented some examples that are computed in detail.

1. Introduction

In differential geometry, a general helix in Euclidean 3-space E^3 is defined by the property that tangent vector makes a constant angle with a fixed direction. A necessary and sufficient condition that a curve be a general helix is that the ratio of curvature to torsion be constant.

2010 Mathematics Subject Classification: **Kindly Provide.**

Keywords and phrases: spherical indicatrix, general helix, slant helix, Bishop Darboux vector

Received August 3, 2013

In [7], a slant helix in Euclidean space E^3 was defined by the property that the principal normal vector makes a constant angle with a fixed direction. Moreover, Izumiya and Takeuchi [7] showed that γ is a slant helix in E^3 , if and only if the geodesic curvature

$$\sigma(s) = \left[\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right],$$

of the principal normal indicatrix of a space curve γ is a constant function. In [5], the authors have studied spherical images of tangent vector and binormal vector of a slant helix and they showed that the spherical images are spherical helix.

The new spherical images of regular curve which are called Bishop spherical images are determined by using Bishop frame vectors in [6].

2. Preliminaries

The Euclidean 3-space E^3 provided with the standard flat metric given by

$$\langle , \rangle = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

where (x_1, x_2, x_3) is a rectangular coordinate system of E^3 . The curve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ is called a unit speed curve if $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$ for each $s \in I$. $T(s) = \alpha'(s)$ is a unit tangent vector of α and $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$ is the curvature of α at s . If $\kappa(s) \neq 0$, then the unit principal normal vector $N(s)$ of the curve α at s is given by $\alpha'' = \kappa(s)N(s)$. The unit vector $B(s) = T(s) \times N(s)$ is called the unit binormal vector of α at s . The Frenet-Serret formulae are given in [2] written under matrix form

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

where

$$\langle T, T \rangle = \langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = 1,$$

$$\langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0,$$

and

$$\tau = -\langle B', N \rangle.$$

The Bishop frame or parallel transport frame is an alternative approach to defining a moving frame that is well defined even when the curve has vanishing second derivative. One can express parallel transport of an orthonormal frame along a curve simply by parallel transporting each component of the frame. The tangent vector and any convenient arbitrary basis for the remainder of the frame are used (for details, see [1]). The Bishop frame is expressed as [1, 3]

$$\begin{bmatrix} T' \\ M'_1 \\ M'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}.$$

Here, we shall call the set $\{T, M_1, M_2\}$ as Bishop trihedra and k_1 and k_2 as Bishop curvatures. The relation matrix may be expressed as

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta(s) & \sin \theta(s) \\ 0 & -\sin \theta(s) & \cos \theta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix},$$

where

$$\theta(s) = \arctan \frac{k_2}{k_1}, \quad (1)$$

$$\tau(s) = \theta'(s), \quad (2)$$

and

$$\kappa(s) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}. \quad (3)$$

Here, Bishop curvatures are defined by

$$\begin{cases} k_1 = \kappa \cos \theta(s), \\ k_2 = \kappa \sin \theta(s). \end{cases}$$

Yilmaz et al. [6] investigated spherical images of a regular curve which correspond to each vector fields of the Bishop frame.

It is well known that for a unit speed curve with non-vanishing curvatures, the following definition and result hold [6]:

Definition 2.1. Let $\gamma = \gamma(s)$ be a regular curve in E^3 . If we translate of the first vector field (tangent) of Bishop frame to the center O of unit sphere in the E^3 , we obtain a spherical image $\xi = \xi(s_\xi)$. This curve is called *tangent Bishop spherical image* or indicatrix of curve $\gamma = \gamma(s)$.

The first curvature κ_ξ of $\xi = \xi(s_\xi)$ is given in [6] by

$$\kappa_\xi = \|\dot{T}_\xi\| = \sqrt{1 + \left[\frac{k_2^3}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right]^2 + \left[\frac{k_1^3}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \left(\frac{k_2}{k_1} \right)' \right]^2}. \quad (4)$$

As it is indicated in [3], if a rigid body moves along a regular curve, then the motion of body consists of translation and rotation along the curve α . The rotation is determined by an angular velocity vector ω , which is called the *Bishop Darboux vector* and given by

$$\omega = -k_2 M_1 + k_1 M_2,$$

ω satisfies these equations:

$$T' = \omega \times T,$$

$$M_1' = \omega \times M_1,$$

$$M_2' = \omega \times M_2,$$

if we unitize the Bishop Darboux vector, we get

$$C = \frac{\omega}{\|\omega\|} = \frac{-k_2 M_1 + k_1 M_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}.$$

3. Main Results

3.1. A new characterization of general helix according to tangent vector field of Bishop frame

Theorem 3.1. *Let $\varphi = \varphi(s)$ be a regular curve with curvatures κ and τ .*

If φ lies on the surface of sphere, then

$$\tau^2(r^2\kappa^2 - 1) = \left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2, \quad (5)$$

where $r = \text{constant}$ is the radius of sphere.

Proof 3.2. To prove that the condition is necessary, we differentiate

$$\|\varphi(s)\|^2 = r^2,$$

we obtain

$$\langle \varphi(s), T \rangle = 0.$$

By differentiating, we have

$$\langle \varphi(s), N \rangle = -\frac{1}{\kappa}, \quad (6)$$

since

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + (\langle\varphi(s), B\rangle)^2 = r^2. \quad (7)$$

So, by differentiating of the formula (6), we get

$$(\langle\varphi(s), B\rangle)\tau = \frac{\kappa'}{\kappa^2}.$$

Take a square of this result and using (7), we have

$$\left(r^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right)^2\right)\tau^2 = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2}\right)^2.$$

By multiplying by κ^2 , we get the equation as desired.

Corollary 3.3. *Let $\varphi = \varphi(s)$ be a curve lies on the surface of radius r with the curvatures κ and τ . κ is a constant function if and only if $\tau = 0$.*

In another words, any spherical curve with $\kappa = \text{constant}$ (resp., $\tau = 0$) is a circle.

Proof 3.4. The sufficiency condition is clear. For to prove that the condition is necessary, we suppose that $\kappa = \text{constant}$. Two situations are distingue:

(1) If $\kappa = \text{constant} \neq \frac{1}{r}$, then $\tau = 0$ (by the Equation (5)).

(2) If $\kappa = \frac{1}{r}$, the Equation (7) became

$$(\langle\varphi(s), B\rangle)^2 = 0.$$

Differentiate this equation and using the Equation (6), we obtain

$$\left\langle\frac{d\varphi}{ds}, B\right\rangle + \left\langle\varphi(s), \frac{dB}{ds}\right\rangle = \frac{\tau}{\kappa} = 0.$$

Since, we immediately arrive at

$$\tau = 0.$$

Theorem 3.5. *Let $\xi = \xi(s_\xi)$ be a spherical indicatrix of tangent vector of γ regular curve. There exists a relation among Frenet-Serret invariants of $\xi = \xi(s_\xi)$ and the Frenet-Serret invariants of $\gamma = \gamma(s)$ as follows:*

$$\kappa_\xi = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}. \quad (8)$$

Proof 3.6. Let $\xi = \xi(s_\xi)$ be a spherical indicatrix of the tangent vector of γ regular curve. From (4), we have

$$\kappa_\xi = \sqrt{1 + \left[\frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \frac{k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' \right]^2 + \left[\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \frac{k_1^2}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' \right]^2}.$$

Using (1) in (2), we have

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \left(\arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right) \right)' \\ &= \frac{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}{k_1^2 + k_2^2}. \end{aligned}$$

By the formula (3) of curvature, we write

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{k_2^2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (9)$$

We have immediately

$$\kappa_\xi = \sqrt{1 + \left[\frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \frac{\tau}{\kappa} \right]^2 + \left[\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \frac{\tau}{\kappa} \right]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}.$$

Corollary 3.7. *Let $\xi = \xi(s_\xi)$ be the tangent Bishop spherical image of the curve $\gamma = \gamma(s)$. γ is a general helix if and only if $\xi = \xi(s_\xi)$ is a circle.*

Proof 3.8. If γ is a general helix, then

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{constant}.$$

By Theorem 3.5,

$$\kappa_\xi = \text{constant}.$$

By the Corollary 3.3, we deduce that the ξ is a circle.

Inversely, if ξ is a circle, using the Equation (8) and the property of a general helix, we conclude that γ is a general helix.

3.2. A new characterization of a slant helix according to principal normal indicatrix

In this section, we give a characterization for a unit speed curve γ in E^3 to be a slant helix by using its principal normal indicatrix (N).

The following remark is given in [4]:

Remark 3.9. If the Frenet frame of the principal normal indicatrix N of a curve γ is $\{T_N, N_N, B_N\}$, then we have the first curvature of Frenet frame

$$\kappa_N = \frac{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)^3 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2}}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}},$$

from this, the curvature of principal normal indicatrix (N) is

$$\kappa_N = \sqrt{1 + \sigma^2(s)}, \quad (10)$$

(see [4]).

Using the result of the Corollary 3.3 and the expression (10), it is easy to state the following theorem:

Theorem 3.10. $\gamma = \gamma(s)$ is a slant helix according to Frenet Frame if and only if the principal normal spherical image is a circle.

3.3. A new characterization of general helix according to Bishop Darboux spherical indicatrix

As indicated in [3], another Bishop spherical image is determined in order to studies this curve, we determine its Frenet-Serret invariants in terms of Frenet invariants and Bishop invariants of γ .

Definition 3.11. Let $\gamma = \gamma(s)$ be a regular curve in E^3 . If we translate of the Bishop Darboux vector field $C = \frac{\bar{\omega}}{\|\omega\|}$ to the center O of unit sphere, we obtain a spherical image $\alpha_C = \alpha_C(s_{\alpha_C})$. This curve is called *Bishop Darboux spherical image* or indicatrix of curve $\gamma = \gamma(s)$.

One can differentiate of α_C with respect s

$$\alpha'_C = \frac{d\alpha_C}{ds_C} \frac{ds_C}{ds} = C'(s).$$

Here, we shall denote differentiation according to s by dash, and differentiation according to s_C by dot.

So we have

$$\dot{\alpha}_C \frac{ds_C}{ds} = C'. \quad (11)$$

In [3], the authors has expressed C' , in terms of Bishop frame vector fields, as follows:

$$\begin{aligned} C' &= \frac{k_2 k_1 k_1' - k_2' k_1^2}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} M_1 + \frac{k_1' k_2^2 - k_1 k_2 k_2'}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} M_2 \\ &= \frac{k_1 k_2^2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} M_1 + \frac{k_2^3 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'}{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}} M_2. \end{aligned}$$

Using the Equation (9), we may write

$$C' = -k_1 \frac{\tau}{\kappa} M_1 - k_2 \frac{\tau}{\kappa} M_2.$$

We have the tangent vector of spherical image as follows:

$$T_{\alpha_C} = -\frac{k_1}{\kappa} M_1 - \frac{k_2}{\kappa} M_2 = -\frac{1}{\kappa} (k_1 M_1 + k_2 M_2) = -N,$$

where

$$\frac{ds_C}{ds} = \tau.$$

Or, using the Equation (3), we can write

$$T_{\alpha_C} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2}} M_1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2}} M_2,$$

where

$$\frac{ds_C}{ds} = -\frac{k_2^2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'}{k_1^2 + k_2^2} = \tau.$$

In order to determine the first curvature of α_C , one can calculate

$$T'_{\alpha_C} = \dot{T}_{\alpha_C} \frac{ds_C}{ds} = -N' = \kappa T - \tau B,$$

since, we have

$$\dot{T}_{\alpha_C} = \frac{\kappa}{\tau} T - B,$$

since, we express

$$\kappa_{\alpha_C} = \|\dot{T}_{\alpha_C}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2},$$

using (9), we will also have

$$\kappa_{\alpha_C} = \sqrt{1 + \left[\frac{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1} \right)'} \right]^2}.$$

Therefore, we have the principal normal

$$N_{\alpha_C} = \frac{\dot{T}_{\alpha_C}}{\|\dot{T}_{\alpha_C}\|} = \frac{1}{\kappa_{\alpha_C}} \left[\frac{\kappa}{\tau} T - B \right].$$

From the relation matrix, Equations (3) and (9) we have

$$N_{\alpha_C} = \frac{1}{\kappa_{\alpha_C}} \left[\frac{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1} \right)'} T + \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} M_1 - \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} M_2 \right].$$

By the cross product of $T_{\alpha_C} \times N_{\alpha_C}$, we obtain the binormal vector field

$$B_{\alpha_C} = \frac{1}{\kappa_{\alpha_C}} \left[T + \frac{\kappa}{\tau} B \right].$$

On the other hand, we can express B_{α_C} in term of Bishop invariants as follows:

$$B_{\alpha_C} = \frac{1}{\kappa_{\alpha_C}} \left[T - \frac{k_2(k_1^2 + k_2^2)}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1} \right)'} M_1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 \left(\frac{k_2}{k_1} \right)'} M_2 \right].$$

In order to determinate the torsion, we differentiate B_{α_C} and we write

$$B'_{\alpha_C} = \dot{B}_{\alpha_C} \frac{ds_C}{ds} = - \frac{\left(\frac{\kappa}{\tau} \right) \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} T + \frac{\left(\frac{\kappa}{\tau} \right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} B,$$

since, we have

$$\dot{B}_{\alpha_C} = -\frac{1}{\tau} \frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} T + \frac{1}{\tau} \frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} B.$$

By the formulae of the torsion, we have

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha_C} &= -\langle \dot{B}_{\alpha_C}, N_{\alpha_C} \rangle \\ &= \frac{1}{\tau} \left[\frac{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'}{1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2} \right], \end{aligned}$$

using (9), we will also have

$$\tau_{\alpha_C} = \frac{1}{\tau} \frac{\left[\frac{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \right]'}{\left[1 + \frac{(k_1^2 + k_2^2)^{\frac{3}{2}}}{k_1^2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'} \right]^2}.$$

Theorem 3.12. *Let $\alpha_C = \alpha_C(s_{\alpha_C})$ Bishop Darboux spherical image of $\gamma = \gamma(s)$. γ is a general helix if and only if α_C is a circle.*

Proof 3.13. Similar to proof of the Corollary 3.7, the above result can be obtained by the equation

$$\kappa_{\alpha_C} = \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2},$$

property of general helix and Corollary 3.3.

4. Examples

Example 4.1. Let us consider a unit speed circular helix by

$$\beta = \beta(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{bs}{c} \right),$$

where $c = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$. One can calculate its Frenet-Serret apparatus as the following:

$$\begin{cases} \kappa = \frac{a}{c^2}, \\ \tau = \frac{b}{c^2}, \\ T = \frac{1}{c} \left(-a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right), \\ N = \left(-\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right), \\ B = \frac{1}{c} \left(b \sin \frac{s}{c}, -b \cos \frac{s}{c}, a \right). \end{cases}$$

In order to determine the Bishop frame of the curve $\beta = \beta(s)$, let us from

$$\theta(s) = \int_0^s \frac{b}{c^2} ds = \frac{bs}{c^2}.$$

Since, we can write the transformation matrix

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{bs}{c^2} & \sin \frac{bs}{c^2} \\ 0 & -\sin \frac{bs}{c^2} & \cos \frac{bs}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}.$$

By the method of Cramer, one can obtain the Bishop trihedra as follows:

The tangent:

$$T = \frac{1}{c} \left(-a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right).$$

The M_1 :

$$M_1 = \left(-\cos \frac{s}{c} \cos \frac{bs}{c^2} - \frac{b}{c} \sin \frac{s}{c} \sin \frac{bs}{c^2}, \frac{b}{c} \cos \frac{s}{c} \sin \frac{bs}{c^2} - \sin \frac{s}{c} \cos \frac{bs}{c^2}, -\frac{a}{c} \sin \frac{bs}{c^2} \right).$$

The M_2 :

$$M_2 = \left(\frac{b}{c} \sin \frac{s}{c} \cos \frac{bs}{c^2} - \cos \frac{s}{c} \sin \frac{bs}{c^2}, -\frac{b}{c} \cos \frac{s}{c} \cos \frac{bs}{c^2} - \sin \frac{s}{c} \sin \frac{bs}{c^2}, -\frac{a}{c} \cos \frac{bs}{c^2} \right).$$

So one can calculate the Bishop Darboux field as follows:

$$C = \left(\frac{b}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{b}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \right).$$

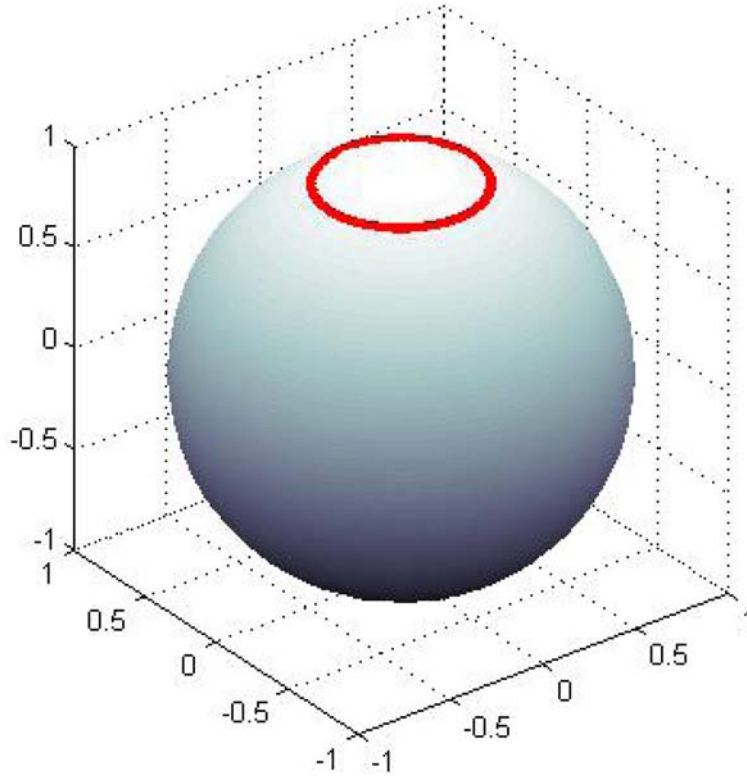


Figure 1. Bishop Darboux spherical indicatrix of $\beta = \beta(s)$.

Example 4.2. Let us consider the following unit speed curve $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{9}{208} \sin(16s) - \frac{1}{117} \sin(36s), \\ \gamma_2 = -\frac{9}{208} \cos(16s) + \frac{1}{117} \cos(36s), \\ \gamma_3 = \frac{6}{65} \sin(10s), \end{cases}$$

this curvature's functions are expressed in [6] as

$$\begin{cases} \kappa(s) = -24 \sin(10s), \\ \tau = 24 \cos(10s). \end{cases}$$

The vectors of Frenet-Serret frame along the curve γ are given by

The tangent:

$$T = \begin{cases} \gamma'_1 = \frac{9}{13} \cos(16s) - \frac{4}{13} \cos(36s), \\ \gamma'_2 = \frac{9}{13} \sin(16s) - \frac{4}{13} \sin(36s), \\ \gamma'_3 = \frac{12}{13} \cos(10s). \end{cases}$$

The principal normal

$$N = \begin{cases} N_1 = \frac{6 \sin(16s)}{13 \sin(10s)} - \frac{6 \sin(36s)}{13 \sin(10s)}, \\ N_2 = -\frac{6 \cos(16s)}{13 \sin(10s)} + \frac{6 \cos(36s)}{13 \sin(10s)}, \\ N_3 = \frac{5}{13}. \end{cases}$$

The binormal

$$B = \begin{cases} B_1 = \frac{45}{169} \sin(16s) - \frac{20}{169} \sin(36s) + \frac{72 \cos(16s)}{169 \tan(10s)} - \frac{72 \cos(36s)}{169 \tan(10s)}, \\ B_2 = -\frac{45}{169} \cos(16s) + \frac{20}{169} \cos(36s) + \frac{72 \sin(16s)}{169 \tan(10s)} - \frac{72 \sin(36s)}{169 \tan(10s)}, \\ B_3 = -\frac{156}{169} \sin(10s). \end{cases}$$

We also need

$$\theta(s) = \int_0^s 24 \cos(10S) ds = \frac{24}{10} \sin(10s).$$

The transformation matrix for the curve $\gamma = \gamma(s)$ has the form

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{24}{10} \sin(10s)\right) & \sin\left(\frac{24}{10} \sin(10s)\right) \\ 0 & -\sin\left(\frac{24}{10} \sin(10s)\right) & \cos\left(\frac{24}{10} \sin(10s)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}.$$

By the method of Cramer, one can obtain the Bishop trihedra as follows:

The tangent

$$T = \begin{cases} \frac{9}{13} \cos(16s) - \frac{4}{13} \cos(36s), \\ \frac{9}{13} \sin(16s) - \frac{4}{13} \sin(36s), \\ \frac{12}{13} \cos(10s). \end{cases}$$

The M_1 :

$$M_1 = \cos\left(\frac{24}{10} \sin(10s)\right)N - \sin\left(\frac{24}{10} \sin(10s)\right)B.$$

The M_2 :

$$M_2 = \sin\left(\frac{24}{10} \sin(10s)\right)N + \cos\left(\frac{24}{10} \sin(10s)\right)B.$$

Using the expression of C , the Bishop Darboux field, we have

$$C = -\sin\left(\frac{24}{10} \sin(10s)\right)M_1 + \cos\left(\frac{24}{10} \sin(10s)\right)M_2.$$

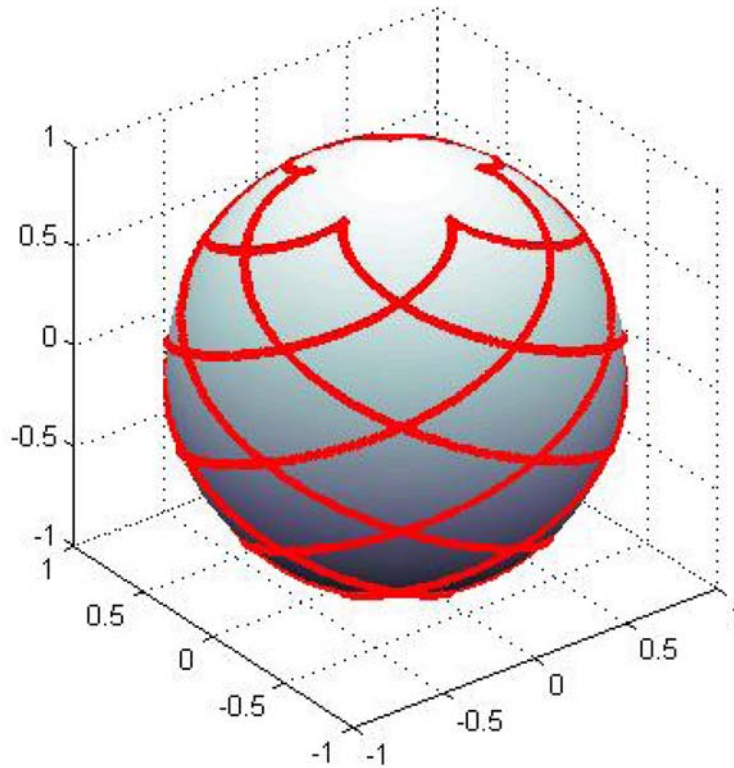


Figure 2. Bishop Darboux spherical indicatrix of $\gamma = \gamma(s)$.

References

- [1] L. R. Bishop, There is more than one way to frame a curve, *Amer. Math. Monthly* 82(3) (1975), 246-251.
- [2] M. P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- [3] I. Arslan Güven, The relation among Bishop spherical indicatrix curves, *International Mathematical Forum* 6(25) (2011), 1209-1215.
- [4] L. Kula, E. Ekmekci, Y. Yayli and K. Ilarslan, Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space, *Turk. J. Math.* 34 (2010), 261-273.
- [5] L. Kula and Y. Yayli, On the slant helix and its spherical indicatrix, *Applied Mathematics and Computation* 169 (2005), 600-607.

- [6] S. Yilmaz, E. Özyilmaz and M. Turgut, New spherical indicatrices and their characterizations, *An. St. Univ. Ovidius Constanta* 18(2) (2010), 337-354.
- [7] S. Izumiya and N. Takeuchi, New special curves and developable surfaces, *Turk. J. Math.* 28 (2004), 153-163.



Our reference no.: TJMAAA 0308134

Proof read by:

Signature:

Date:

Tel:

Fax:

E-mail:

Reprint

ISSN 0973-9424

**INTERNATIONAL JOURNAL OF
MATHEMATICAL SCIENCES
AND ENGINEERING
APPLICATIONS**

(IJMSEA)



www.ascent-journals.com

ON SERRET-FRENET INVARIANTS OF BISHOP SPHERICAL INDICATRICES

M. IZID¹, A. OUZZANI², M.GUESSOUS³ AND M.RIHANI⁴

¹⁻⁴ Department of Mathematics,
Ben M. Sik Faculty of Science,
Hassan II Mohammadia-Casablanca University,
P 7955 Casablanca, Morocco
E-mail: ² ouazzaniamina@hotmail.com

Abstract

In this work, we determine the Serret-Frenet apparatus of Bishop Spherical Indicatrices in terms of Frenet invariants of basic curve. Thereafter, some new characterizations of a general helix and a slant helix are presented. Additionally, we presented two examples to illustrate the main results.

1. Introduction

Many researchers use the Frenet frame of a curve to characterize the properties of curves. This thought aroused that there can be other frames which have some advantages with the Frenet frame.

Then, in 1975, R.L. Bishop introduced the Bishop frame or parallel transport frame which can be uncovered by tangent vector and two parallel vectors of the curve.

Key Words : *Spherical Indicatrix, General Helix, Slant Helix, Bishop Frame.*

© <http://www.ascent-journals.com>

The new spherical images of regular curve which are called the Bishop spherical images are determined by using Bishop frame vectors in [7].

In this work, we determine the Serret-Frenet apparatus of Bishop spherical indicatrices in terms of base curve's Frenet invariants, and we investigate relations between Serret-Frenet invariants of Bishop spherical images and Serret-Frenet invariants of the base curve. Additionally, some characterizations of Bishop spherical image to be a general helix if the base curve is a general helix or a slant helix are presented.

2. Preliminaries

The Euclidean 3-space E^3 provided with the standard flat metric given by

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

where (x_1, x_2, x_3) is a rectangular coordinate system of E^3 . Recall that, the norm of an arbitrary vector $a \in E^3$ is given by $\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$. φ is called a unit speed curve if velocity vector v of φ satisfies $\|v\| = 1$. For vectors $v, w \in E^3$ it is said to be orthogonal if and only if $\langle v, w \rangle = 0$. Let $\vartheta = \vartheta(s)$ be a regular curve in E^3 . If the tangent vector of this curve forms a constant angle with a fixed constant vector U , then this curve is called a general helix or an inclined curve. The sphere of radius $r > 0$ and with center in the origin in the space E^3 is defined by

$$S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in E^3 / \langle x, x \rangle = r^3\}.$$

Denote by $\{T, N, B\}$ the moving Serret-Frenet frame along the curve φ in the space E^3 . For an arbitrary curve φ with first and second curvature, κ and τ in the space E^3 , the following Serret-Frenet formulae are given in [3] written under matrix form

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

where

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= \langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = 1, \\ \langle T, N \rangle &= \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0. \end{aligned}$$

Here, curvature functions are defined by $\kappa = \kappa(s) = \|T'(s)\|$ and $\tau(s) = -\langle N, B' \rangle$. The Bishop frame or parallel transport frame is an alternative approach to defining a moving frame that is well defined even when the curve has vanishing second derivative. One can express parallel transport of an orthonormal frame along a curve simply by parallel transporting each component of the frame [1]. The tangent vector and any convenient arbitrary basis for the remainder of the frame are used (for details, see [2]). The Bishop frame is expressed as [1, 2]

$$\begin{bmatrix} T' \\ M_1' \\ M_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}.$$

Here, we shall call the set $\{T, M_1, M_2\}$ as Bishop trihedra and k_1 and k_2 as Bishop curvatures. The relation matrix may be expressed as

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta(s) & \sin \theta(s) \\ 0 & -\sin \theta(s) & \cos \theta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

where

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \arctan \frac{k_2}{k_1}, \\ \tau(s) &= \theta'(s) \end{aligned}$$

and

$$\kappa(s) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}. \quad (2)$$

Here, Bishop curvatures are defined by

$$\begin{cases} k_1 = \kappa \cos \theta(s) \\ k_2 = \kappa \sin \theta(s) \end{cases}. \quad (3)$$

It is well-known that for a unit speed curve with non vanishing curvatures the following proposition hold [3].

Proposition 2.1 : Let $\gamma = \gamma(s)$ be a regular curve with curvatures κ and τ , γ is a general helix if and only if

$$\frac{\kappa}{\tau} = \text{constant}.$$

In [5], a slant helix in Euclidean space E^3 was defined by the property that the principal normal vector makes a constant angle with a fixed direction. Moreover, Izumiya and Takeuchi [5] showed that γ is a slant helix in E^3 , if and only if the geodesic curvature

$$\sigma(s) = \left[\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right] \quad (4)$$

of the principal normal indicatrix of a space curve γ is a constant function. In [4], the authors have studied spherical images of tangent vector and binormal vector of a slant helix and they showed that the spherical images are spherical helix.

3. Main Results

3.1 On the Serret-Frenet Frame of Tangent Spherical Image

As indicated in [7], the authors defined the tangent Bishop image of a regular curve. We determine the Serret-Frenet frame of the tangent spherical image in term of Serret-Frenet frame of a base curve.

Definition 3.1 : Let $\gamma = \gamma(s)$ be a regular curve in E^3 . If we translate of the first vector field (tangent) of Bishop frame to the center O of unit sphere in the E^3 . We obtain a spherical image $\xi = \xi(s_\xi)$. This curve is called tangent Bishop spherical image or indicatrix of curve $\gamma = \gamma(s)$.

The tangent vector T_ξ of $\xi = \xi(z_\xi)$ is given, in [7], by

$$T_\xi = \frac{k_1 M_1 + k_2 M_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} = \frac{1}{\kappa} (k_1 M_1 + k_2 M_2) \quad (5)$$

and

$$\frac{ds_\xi}{ds} = \kappa. \quad (6)$$

Using the transformation matrix (1), we have

$$M_1 = \cos \theta(s) N - \sin \theta(s) B \quad (7)$$

and

$$M_2 = \sin \theta(s) N + \cos \theta(s) B. \quad (8)$$

Substituting (7) and (8) to (5), we have

$$T_\xi = \frac{1}{\kappa} [(k_1 \cos \theta(s) + k_2 \sin \theta(s)) N + (-k_1 \sin \theta(s) + k_2 \cos \theta(s)) B],$$

using the formulae (3), we have

$$T_\xi = N.$$

One can differentiate the T_ξ with respect to s

$$T'_\xi = \frac{dT_\xi}{ds_\xi} \frac{ds_\xi}{ds} = N' = -\kappa T + \tau B.$$

Here, we shall denote differentiation according to s by a dash, and differentiation according to s_ξ by a dot. In order to determine the first curvature of $\xi = \xi(s_\xi)$, we write

$$\dot{T}_\xi = -T + \frac{\tau}{\kappa} B.$$

Since, we express

$$\kappa_\xi = \|\dot{T}_\xi\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}. \quad (9)$$

Therefore, we have the principal normal

$$N_\xi = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \left(-T + \frac{\tau}{\kappa} B\right).$$

By the cross product of $T_\xi \times N_\xi$, we obtain the Binormal vector field

$$B_\xi = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} T + B\right).$$

In order to determinate the torsion, we differentiate B_ξ with respect to s

$$B'_\xi = \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{\left(1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(T - \frac{\tau}{\kappa} B\right).$$

Using the formulae of the torsion, we obtain

$$\tau_\xi = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'. \quad (10)$$

Consequently, we determined Serret-Frenet invariants of the tangent Bishop spherical indicatrix in terms of Frenet invariants of the base curve.

Theorem 3.2 : Let $\xi = \xi(s_\xi)$ be the tangent Bishop spherical image of a regular curve $\gamma = \gamma(s)$. There exists a relation among Serret-Frenet invariants of $\xi = \xi(s_\xi)$ and the geodesic curvature of the principal normal indicatrix of γ , as follows

$$\frac{\tau_\xi}{\kappa_\xi} = \sigma(s). \quad (11)$$

Proof 3.3 : In terms of equations (4), (9) and (10), we immediately arrive to result as desired.

Considering equation (11) and by the proposition 2.1, we get a new characterization of slant helix according to Serret-Frenet frame:

Theorem 3.4 : Let $\gamma = \gamma(s)$ be a regular curve. γ is a slant helix according to Serret-Frenet frame if and only if the tangent Bishop Spherical image is a general helix.

3.2 On the Serret-Frenet Frame of M_1 and M_2 Bishop Spherical images

Yilmaz, Ozyilmaz and Turgut investigated spherical images of a regular curve which correspond to each vector fields of the Bishop frame.

It is well known that for a unit speed curve with non-vanishing curvatures the following definitions hold [7].

Definition 3.5 : Let $\gamma = \gamma(s)$ be a regular curve in E^3 . If we translate of the second vector field of Bishop frame to the center O of the unit sphere S^2 , we obtain a spherical image $\delta = \delta(s_\delta)$. This curve is called M_1 Bishop spherical image or indicatrix of the curve $\gamma = \gamma(s)$.

The tangent vector of $\delta = \delta(s_\delta)$, is given by

$$T_\delta = T$$

and

$$\frac{ds_\delta}{ds} = -k_1 = -\kappa \cos \theta(s).$$

Thus, we differentiate

$$T'_\delta = \frac{dT_\delta}{ds_\delta} \frac{ds_\delta}{ds} = T' = kN$$

we have

$$\dot{T}_\delta = -\frac{1}{\cos \theta(s)} N.$$

Since, we express

$$\kappa_\delta = \|\dot{T}_\delta\| = \frac{1}{\cos \theta(s)} \tag{12}$$

and

$$N_\delta = \frac{\dot{T}_\delta}{\|\dot{T}_\delta\|} = -N.$$

The cross product of $T_\delta \times N_\delta$ gives us the Binormal vector field of M_1 Bishop Spherical image of $\gamma = \gamma(s)$

$$B_\delta = -B.$$

We conclude that

$$(T_\delta, B_\delta, N_\delta) = (T, -N, -B).$$

In order to determinate the expression of the torsion, we write

$$B'_\delta = \dot{B}_\delta \frac{ds_\delta}{ds} = -B' = \tau N$$

since, we have

$$\dot{B}_\delta = \frac{\tau}{-\kappa \cos \theta(s)} N.$$

By the formulae of the torsion, we have

$$\tau_\delta = -\frac{\tau}{\kappa \cos \theta(s)}. \quad (13)$$

Immediately, the following result holds.

Theorem 3.6 : Let $\delta = \delta(s_\delta)$ be the M_1 Bishop spherical image of a regular curve $\gamma = \gamma(s)$. There exists a relation among Serret-Frenet invariants of $\delta = \delta(s_\delta)$ and the Serret-Frenet invariants of $\gamma = \gamma(s)$ as follows

$$\frac{\tau_\delta}{\kappa_\delta} = -\frac{\tau}{\kappa}. \quad (14)$$

Definition 3.7 : Let $\gamma = \gamma(s)$ be a regular curve in E^3 . If we translate of the third vector field of Bishop frame to the center O of the unit sphere S^2 , we obtain a spherical image of $\psi = \psi(s_\psi)$. This curve is called the M_2 Bishop spherical image or the indicatrix of the curve $\gamma = \gamma(s)$.

The tangent vector of $\psi = \psi(s_\psi)$ is given by

$$T_\psi = T$$

and

$$\frac{ds_\psi}{ds} = -k_2 - \kappa \sin \theta(s).$$

Thus, we differentiate

$$T'_\psi = \frac{dT_\psi}{ds_\psi} \frac{ds_\psi}{ds} = T' = kN$$

we have

$$\dot{T}_\psi = -\frac{1}{\sin \theta(s)} N.$$

Since, we express

$$\kappa_\psi = \|\dot{T}_\psi\| = \frac{1}{\sin \theta(s)} \quad (15)$$

and

$$N_\psi = \frac{\dot{T}_\psi}{\|\dot{T}_\psi\|} = -N.$$

The cross product of $T_\psi \times N_\psi$ gives us the Binormal vector field of M_2 Bishop Spherical image of $\gamma = \gamma(s)$

$$B_\psi = -B.$$

Similar to the M_1 spherical indicatrix, we obtain

$$(T_\psi, N_\psi, B_\psi) = (T, -N, -B).$$

In order to determinate the expression of the torsion, we write

$$B'_\psi = \dot{B}_\psi \frac{ds_\psi}{ds} = -B' = \tau N$$

since, we have

$$\dot{B}_\psi = \frac{\tau}{-\kappa \sin \theta(s)} N.$$

By the formulae of the torsion, we have

$$\tau_\psi = -\frac{\tau}{\kappa \sin \theta(s)}.$$

It follows the theorem.

Theorem 3.8 : Let $\psi = \psi(s_\psi)$ be the M_1 Bishop spherical image of regular curve $\gamma = \gamma(s)$. There exists a relation among Serret-Frenet invariants of $\gamma = \gamma(s)$ and the Serret-Frenet invariants of $\gamma = \gamma(s)$ as follows

$$\frac{\tau_\psi}{\kappa_\psi} = -\frac{\tau}{\kappa}. \quad (16)$$

Considering equations (14), (16) and by the proposition 2:1; we get the new characterizations of a general helix:

Theorem 3.9 : Let $\gamma = \gamma(s)$ be a regular curve: γ is a general helix if and only if the M_1 (respectively M_2) Bishop spherical image is a general helix.

4. Examples

Example 4.1 : Let us consider a unit speed circular helix by

$$\beta = \beta(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{bs}{c} \right)$$

where $c = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$. One can calculate its Serret-Frenet apparatus as the following:

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa = \frac{a}{c^2} \\ \tau = \frac{b}{c^2} \\ T = \frac{1}{c} \left(-a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right) \\ N = \left(-\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right) \\ B = \frac{1}{c} \left(b \sin \frac{s}{c}, -b \cos \frac{s}{c}, a \right) \end{array} \right.$$

In order to determine the Bishop frame of the curve $\beta = \beta(s)$, let us form

$$\theta(s) = \int_0^s \frac{b}{c^2} ds = \frac{bs}{c^2}.$$

Since, we can write the transformation matrix

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{bs}{c^2} & \sin \frac{bs}{c^2} \\ 0 & -\sin \frac{bs}{c^2} & \cos \frac{bs}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}.$$

By the method of Cramer, one can obtain the Bishop trihedra as follows:

The tangent:

$$T = \frac{1}{c} \left(-a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right).$$

The M_1 :

$$M_1 = \left(-\cos \frac{s}{c} \cos \frac{bs}{c^2} - \frac{b}{c} \sin \frac{s}{c} \sin \frac{bs}{c^2}, \frac{b}{c} \cos \frac{s}{c} \sin \frac{bs}{c^2} - \sin \frac{s}{c} \cos \frac{bs}{c^2}, -\frac{a}{c} \sin \frac{bs}{c^2} \right).$$

The M_2 :

$$M_2 = \left(\frac{b}{c} \sin \frac{s}{c} \cos \frac{bs}{c^2} - \cos \frac{s}{c} \sin \frac{bs}{c^2}, -\frac{b}{c} \cos \frac{s}{c} \cos \frac{bs}{c^2} - \sin \frac{s}{c} \sin \frac{bs}{c^2}, -\frac{a}{c} \cos \frac{bs}{c^2} \right).$$

So the Frenet curvatures of the Bishop spherical indicatrices of $\beta = \beta(s)$ are calculate as follows

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{\xi} = \frac{c}{a} \\ \tau_{\xi} = 0 \\ \kappa_{\delta} = \frac{1}{\cos\left(\frac{bs}{c^2}\right)} \\ \tau_{\delta} = -\frac{b}{a \cos\left(\frac{bs}{c^2}\right)} \\ \kappa_{\psi} = \frac{1}{\sin\left(\frac{bs}{c^2}\right)} \\ \tau_{\psi} = -\frac{b}{a \sin\left(\frac{bs}{c^2}\right)}. \end{array} \right.$$

then, $\xi = \xi(s_{\xi})$ is a cercle and

$$\frac{\tau}{\kappa} = -\frac{\tau_{\delta}}{\kappa_{\delta}} = -\frac{\tau_{\psi}}{\kappa_{\psi}} = \frac{b}{a}.$$

So, the M_1 and M_2 Bishop Spherical indicatrices are general helices.

Example 4.2 : Let us consider the following unit speed curve $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \frac{\alpha+\mu}{2\alpha} \frac{\sin[(\alpha-\mu)s]}{\alpha-\mu} - \frac{\alpha-\mu}{2\alpha} \frac{\sin[(\alpha+\mu)s]}{\alpha+\mu} \\ \gamma_2 = -\frac{\alpha+\mu}{2\alpha} \frac{\cos[(\alpha-\mu)s]}{\alpha-\mu} + \frac{\alpha-\mu}{2\alpha} \frac{\cos[(\alpha+\mu)s]}{\alpha+\mu} \\ \gamma_3 = \frac{\omega}{\mu\alpha} \sin(\mu s) \end{array} \right.$$

where

$$\alpha = \sqrt{\omega^2 + \mu^2}$$

and ω and μ are constant. This curvature's functions are expressed as in [6]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa(s) = -\omega \sin(\mu s) \\ \tau = \omega \cos(\mu s). \end{array} \right.$$

Using the expression of Frenet curvatures of Tangent Bishop Spherical indicatrix, we have

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{\xi} = \frac{1}{\sin(\mu s)} \\ \tau_{\xi} = \frac{\mu}{\omega} \frac{1}{\sin(\mu s)} \end{array} \right.$$

We immediately arrive to

$$\frac{\tau_{\xi}}{\kappa_{\xi}} = \frac{\mu}{\omega} = Cte,$$

or

$$\frac{\tau}{\kappa} \neq constant$$

so we concluded that $\gamma = \gamma(s)$ is a slant helix which is not a general helix.

References

- [1] Bükücü B. and Karacan, M. K., The Slant Helices according to Bishop frame, Int. J. Comput. Math. Sci., 3(2) (2009), 67- 70.
- [2] Bishop L. R., There is more than one way to frame a curve, Amer. Math. Monthly, 82(3) (1975), 246-251.
- [3] Do Carmo M. P., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1976).
- [4] Kula L. and Yayli Y., On the slant helix and its spherical indicatrix. Applied Mathematics and Computation, 169 (2005), 600-607.
- [5] Izumiya S. and Takeuchi N., New spherical curves and developable surface, Turk. J. Math., 28 (2004), 153-163.
- [6] Scofield P. D., Curves of constant precession, Amer. Math. Monthly, 102 (1995), 531-537.
- [7] Yilmaz S., Özyilmaz and Turgut M., New spherical indicatrices and their characterizations, An. St. Univ. Ovidius Constanta, 18(2) (2010), 337-354.